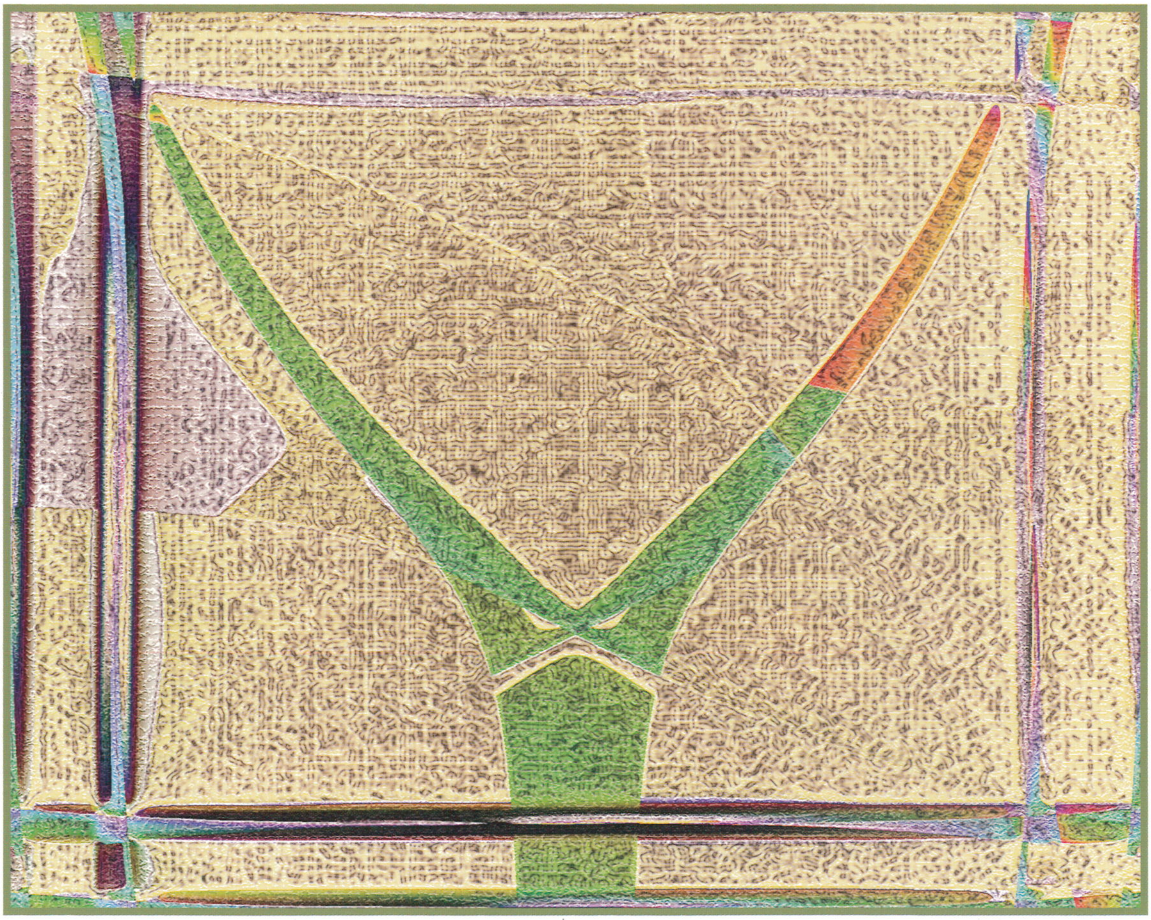
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2009年3月1日発行　第47巻3号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

3
2009

特集
方程式に潜む対称性
“美しさ”から探る方程式の見方



No.549

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 549 March 2009

方程式に潜む対称性

“美しさ”から探る方程式の見方

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌十別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌十別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2006 年/8 省略
2006 年/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊 場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊 双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊 素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊 多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界
/10 ポアンカレ
別冊 対称性と保存則
/11 物理と論理
/12 確率論的物理観
2009 年/1 グラフィックでわかる物理
/2 発展する量子力学

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数
08 年/11 量子暗号理論の展開
09 年/1 量子力学の考え方

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——
東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

MATHEMATICAL SCIENCES
March 2009 Number 549

特集／方程式に潜む対称性

世界の形，方程式の形

砂田 利一

1. 序

大学にいるものすべてが否応なく紛争*1)に巻き込まれた時代，そんな異常な雰囲気の中で，数学科の友人たちと教室の片隅に座りながら，将来数学のどの分野に進むかを取りとめもなく話し合ったことがあった．皆が自分自身の未来像を考えあぐねて黙り込んでいたとき，突然ひとりが立ち上がり，偏微分方程式の研究者を目指していると力強く宣言した．理由はと聞くと，「ラプラス方程式がとても美しく見えるから」という．「そういう理由もあるのか」と，そのときは聞き流していたが，大学が平常に戻り，自分自身が**ラプラス作用素**に関係する幾何学の研究に勤しむようになってから，この友人の言葉を度々思い出すこととなった．

そう，なぜラプラス方程式は美しいのか？ なぜ，ラプラス作用素に拘るのか？ ここでは，ラプラス作用素を一つの例として，物理学や数学に登場するいくつかの方程式の「美しさ」について独断的に語ろうと思う*2)．

*1) 1968年にフランス，パリのカルティエ・ラタンから始まり，世界中の大学に広がった学生の抗議行動．

*2) 全般的な参考文献としては，拙著[1]を挙げておく．

2. 世界の形から方程式の形へ

元々「対称」という用語は，ものの形を形容する言葉である．「対称な形は美しい」．非対称なものにも美を愛でる日本人としては，このような単純な美意識には異を唱えたいが，ここでは素直にそれを認めよう．

実は，「世界」を記述する方程式も，「世界」という一種の「形」の対称性に根ざしている．従って，世界が美しければ方程式も美しく，その逆も真である．例えば，ニュートン力学が支配する古典的な空間は，平坦でありかつ等質，等方的である．くだけた言い方をすれば，「平らで，どの場所もどの方向にも違いがない」．このような大きい対称性を持つ世界の法則が微分作用素を用いて記述されるとすれば，この微分作用素はどのようなものでなければならないか．実は，空間の対称性を反映する微分作用素*3)は本質的にラプラス作用素しかない（正確にはラプラス作用素の多項式しかない）．ここで，直交座標系を取ることにより空間を3次元数空間 $\mathbb{R}^3$ と同一視すると，ラプラス作用素は

*3) すべての合同変換と可換な（スカラー関数をスカラー関数に写す）微分作用素．

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と表される偏微分作用素である．我が学友が主張するように，確かにこれは美しい．

この，ジョルダーノ・ブルーノ（1548–1600）の思弁*4)を彷彿とさせる理由付けから導かれたラプラス作用素が，現実の（古典的）世界の法則に関係していることは，ニュートンの重力理論が証明している．すなわち，物体の質量密度を ρ，それが引き起こす重力ポテンシャルを u とすれば，万有引力の法則は**ポアソンの方程式** $\Delta u = 4\pi G\rho$ に帰着されるのである（ここでは，G は重力定数）．実際，質量 m の1質点が原点に置かれているとき，ポアソンの方程式は $\Delta u = 4\pi G m\delta$（$\delta$ はディラックのデルタ関数）となり，もし無限遠で0になる（超関数）解 u を求めれば $u(\boldsymbol{x}) = -mG/\|\boldsymbol{x}\|$ となる．従って，この質点が及ぼす力の場は $-\mathrm{grad}\ u = -mG\boldsymbol{x}/\|\boldsymbol{x}\|^3$ となるから，これは逆二乗の法則に他ならない．

ラプラス作用素は，重力理論ばかりでなく，波動，振動，熱伝導，ブラウン運動，静電磁気学，非相対論的量子力学*5)にも登場し，その普遍性には驚くべきものがある．さらに抵抗回路，ランダム・ウォーク，結晶の幾何学的理論ではラプラス作用素の離散類似が登場し，その八面六臂の活躍には目を見張るものがある（文献2,4)）．

3. 方程式の形から世界の形へ

古典的世界の「形」からラプラス作用素が導かれたが，逆に方程式から「新しい世界」の形が導かれる例を与えよう．

電場の時間変化は磁場を引き起こし，磁場の時間変化は電場を引き起こす．マクスウェルはこの相互的関係を微分方程式として表現した（1873年）．ところが彼の与えた方程式はとんでもなく複雑で，美しいとはとても言えない．そこでヘルツが整理を行い，結局は電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場（磁束密度）$\boldsymbol{B}$ に関する次のような方程式系にまとめたのである．

$$\begin{cases} \epsilon_0\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) = \rho(t,\boldsymbol{x}), \\ \mu_0^{-1}\mathrm{rot}\ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) - \epsilon_0\dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \boldsymbol{i}(t,\boldsymbol{x}), \\ \mathrm{div}\ \boldsymbol{B}(t,\boldsymbol{x}) = 0, \\ \mathrm{rot}\ \boldsymbol{E}(t,\boldsymbol{x}) + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

ここで，ρ は電荷密度，$\boldsymbol{i}$ は電流密度である．また，ϵ_0 は真空の誘電率，μ_0 は透磁率である．

方程式(1)を見て，美しいと思うかどうかは意見の分かれるところであろう．それはさておき，なぜこの方程式から新しい世界が導かれるのだろうか．

古典的世界は時間とは独立に存在する．この独立性を担保する時空のモデルは**ガリレイ時空**と呼ばれる．すべての「普遍的」物理法則は時空のモデルにより表現されるはずだから，マクスウェルの方程式がもし古典的世界の法則を表すのなら，ガリレイ時空の言葉で描かれなければならない．ところが，幸か不幸か，そうは問屋がおろさないのである．そこで登場するのが**ミンコフスキー時空**である．

このミンコフスキー時空でマクスウェルの方程式を表現すれば，

$$d\Omega = 0, \quad d^*\Omega = \eta. \tag{2}$$

が得られる．ここで，Ω は電磁場に対応する2次の微分形式であり，η は電荷密度と電流密度に対応する1次の微分形式である．また，d, d^* は外微分作用素とその共役作用素を表す．逆に言えば，大方の人が美しさを認めるであろうマクスウェル方程式のこの表記は，電磁場の法則がミンコフスキー時空における法則であることを意味している*6)．

*4) ブルーノは「宇宙は無限に広がり，どこにも特別な中心はない」と主張した．

*5) 本特集の新井朝雄氏による論説「シュレーディンガー方程式とディラック方程式における対称性—量子力学」参照．

*6) 相対論的対称性の詳細については，本特集の高崎金久氏の論説「無質量自由場の方程式と対称性—スピナーとツイスター」をご覧いただきたい．また，電磁場をゲージ場として非可換化した理論については，本特集の橋本義武氏による論説「ヤン・ミルズ方程式と対称性—素粒子物理」を参照されたい．

なお相対論の範疇で重力の理論を展開しようとすれば，ミンコフスキー時空を「曲げて」ローレンツ多様体にする必要がある．そして，ポアソンの方程式は，リッチ曲率 R_{ij} に関する方程式

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{ij} \tag{3}$$

へと形を変える*7)．ここで，g_{ij} は第1基本形式の係数，T_{ij} は物質のエネルギー・運動量テンソル，R はスカラー曲率を表す．

4. 方程式の「隠れた」美しさ

これまで見てきたように，「自然な」方程式には「自然な」空間が付随している．これは古典力学においても同様である．ニュートンの方程式は質点の位置に関する2階の常微分方程式であるが，一般の拘束系に対して位置 $\boldsymbol{q}$ と運動量 $\boldsymbol{p}$ の間の関係式として書き直せば，1階の微分方程式系

$$\dot{\boldsymbol{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{q}}, \quad \dot{\boldsymbol{q}} = \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{p}}$$

として表される．これは位置と運動量の「双対的」関係を表現しており，**ハミルトンの方程式**と呼ばれる*8)．では，ハミルトンの方程式に付随する「自然な」空間は何か．それは，**シンプレクティック多様体**と呼ばれる空間である．この空間は極めて数学的な空間であるが，統計力学や量子力学を展開する上で重要な役割を果たす*9)．

ハミルトン形式による「書き換え」は，隠されていた美を表に出す．その例を最後に挙げよう．次の特異な形をした方程式は，1834年にスコット－ラッセルが観測した長い浅い運河における「孤立波」の満たす非線型波動方程式として，1845年にコートウェッとド・ヴリエスによって与えられた．

$$u_t = 3uu_x - \frac{1}{2}u_{xxx}.$$

これを **K-dV 方程式**と言う．この方程式は長く忘れ去られていたが，1960年代になって，「完全積分可能（可積分）系」の理論が展開されるようになり，無限次元の可積分ハミルトン方程式として見直されたのである*10)．実際，

$$H(u) = \int \left(\frac{1}{2}u^3 + \frac{1}{4}(u_x)^2\right)dx$$

により汎関数 H を定義すると，K-dV 方程式は $\frac{du}{dt} = \frac{d}{dx}\frac{\delta H}{\delta u}$ と表され，これは無限次元のハミルトン方程式と見なされるのである．

数学者は，方程式そのもの，あるいはその背後にある美しさに魅了されてきた．すなわち理詰めとは異なる感性が数学者を突き動かすのである．この意味で，我が学友がいみじくも述べた理由は至極尤もなことだったのである．

*7) 本特集の白水徹也氏による論説「アインシュタイン方程式と対称性」参照．

*8) 古典力学の具体的な問題では，ハミルトン形式に移る前の，いわゆるラグランジアン形式による表記のほうが便利なことが多い．その例として，本特集の中村孔一氏による論説「対称性，不変性，保存則―ケプラー運動を例にして」を読むことを薦める．

*9) （熱）統計力学においても，対称性の考え方は重要である．本特集の園田英徳氏による論説「繰り込み群方程式と対称性」を参照されたい．

*10) 本特集の武部尚志氏の論説「ソリトン方程式の対称性―可積分系」を参照．

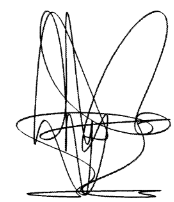
参考文献

1) 砂田利一，「物の理，数の理」全5巻，岩波書店，2003～2005年．
2) 砂田利一，「離散スペクトル幾何」（フォーラム：現代数学の風景/ラプラシアンの諸相），数学のたのしみ（通号 **12**），67～80，日本評論社，1999年．
3) 砂田利一，「私たちを取り巻く『空間』」，数理科学2006年4月号．
4) 砂田利一，『ダイヤモンドはなぜ美しい？―離散調和解析入門―』，シュプリンガー・ジャパン，2006年．

（すなだ・としかず，明治大学理工学部）

対称性，不変性，保存則

ケプラー運動を例にして



中村　孔一

1. 角運動量の保存則

今年2009年は，ケプラーが著書『新天文学』を出版し，いわゆるケプラーの第1法則と第2法則を世に問うてから400周年の年に当たる．**面積速度が一定**と表現される第2法則は定量的な形で述べられた**保存則**の最初のものであろう．その意味で今年は保存則にとって特別な年なのである．

ケプラーが何年もの悪戦苦闘の末に見つけ出した（発見の顛末は文末の文献1)を参照）この保存則も，現代の初等力学の教科書では角運動量の保存則の結果として数行の式の変形で導き出されてしまう．まずはその復習から始めよう．

太陽から惑星に向かうベクトルを $\boldsymbol{r}$ とすると，惑星の運動を決める運動方程式は

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

と書ける．$\kappa =$ 太陽の質量 $\times$ 重力定数．

この式の両辺に左から $\boldsymbol{r}$ をベクトル積の意味でかけると，$\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{r} = 0$ より右辺は 0 になる．したがって，

$$\boldsymbol{r}\times\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = 0. \tag{2}$$

さらに

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = 0$$

に注意すると，式(2)は

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right) = 0$$

と書き直せる．この式は，次の式で定義される**角運動量ベクトル**

$$\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \tag{3}$$

が時間によらず一定であることを意味している．

角運動量ベクトル $\boldsymbol{l}$ の長さは，定義から

$$|\boldsymbol{l}| = r\left|\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right|\sin\theta.$$

ただし，θ は $\boldsymbol{r}$ と $d\boldsymbol{r}/dt$ のなす角度である．$|d\boldsymbol{r}/dt|\sin\theta$ は速度 $d\boldsymbol{r}/dt$ の $\boldsymbol{r}$ に直交する成分であるから，$|\boldsymbol{l}|$ は面積速度の2倍になる．したがって，ケプラーの第2法則

$$\text{面積速度} = \frac{1}{2}|\boldsymbol{l}| = \text{一定}$$

は角運動量 $\boldsymbol{l}$ が一定であることの帰結として導かれたことになる．

式(2)の右辺が 0 になるのは，式(1)の右辺と $\boldsymbol{r}$ のベクトル積が 0 になるからであった．すなわち，式(1)の右辺が $\boldsymbol{r}$ に比例していれば式(2)が導かれる．言い換えると，物体に働く力の方向が $\boldsymbol{r}$ に平行（力が中心力）ならば角運動量は保存することになる．

ケプラーの見つけた面積速度一定という保存則は，大きさが距離の2乗に反比例する重力を受けて運動する惑星の運動に限らず，もっと一般に中心力を受けて運動する物体の運動に対して成り立

つ保存則なのだ．

2. ルンゲ・レンツのベクトル

式 (1) に従う運動に限れば，もう一つ保存するベクトルがある．式 (1) の両辺に右から $\boldsymbol{l}$ をベクトル積の意味でかけると

$$\begin{aligned}\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{l} &= -\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\times\left(\boldsymbol{r}\times\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\\ &= -\kappa\frac{1}{r^3}\left[\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\boldsymbol{r}-r^2\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right]\\ &= \kappa\left[\frac{1}{r}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}-\left(\boldsymbol{r}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right]\\ &= \frac{d}{dt}\left(\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right).\end{aligned}$$

一方，$d\boldsymbol{l}/dt=0$ に注意すると，

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}\times\boldsymbol{l}=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{l}\right).$$

したがって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{l}-\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0.$$

すなわち，

$$\boldsymbol{e}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times\boldsymbol{l}-\kappa\frac{\boldsymbol{r}}{r} \qquad (4)$$

で定義されるベクトル $\boldsymbol{e}$ は時間によらず一定である．このベクトル $\boldsymbol{e}$ は**ルンゲ・レンツのベクトル**と呼ばれている．このベクトルが保存することを示した上の議論は式 (1) の右辺の具体的な形に依存している．この保存則は，中心力一般ではなく，距離の 2 乗に反比例する大きさをもつ中心力による運動に固有の保存則である．

実は，一般の中心力による運動で角運動量が保存することは，系が回転に関して対称であることと密接に関係している．では，ルンゲ・レンツのベクトルの保存はどんな対称性に関係しているのだろうか．

こうした問題を考えるために，以下の節で保存則と対称性の関係を少し一般的に議論してみよう．

3. 変数変換とラグランジアンの不変性

保存則と対称性の関係を一般的に議論するために，**ラグランジュ形式での運動の記述**から始めよう．

といっても，限られたページ数で解析力学の一般論を展開する余裕はないので，運動方程式 (1) に従う運動（ケプラー運動と呼ぼう）に則して話を進めることにする．それでも議論の筋道が一般性をもつことは感じ取れると思う．

ケプラー運動のように，保存力の下での運動の場合には，ラグランジアンは運動エネルギー T とポテンシャル・エネルギー U の差

$$L=T-U$$

で与えられる．ケプラー運動の場合に，具体的に書けば

$$L=\frac{1}{2}\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}+\kappa\frac{1}{r} \qquad (5)$$

となる．

ケプラー運動では角運動量ベクトル $\boldsymbol{l}$ は一定に保たれ，また $\boldsymbol{l}$ の定義から $\boldsymbol{l}$ と $\boldsymbol{r}$ は常に直交している．したがって，運動は $\boldsymbol{l}$ に直交する平面（軌道面）に限られる．そこで，力の中心を原点にして軌道面上に取った 2 次元直交座標での $\boldsymbol{r}$ の成分を $\boldsymbol{r}=(x_1,x_2)$ として，ラグランジアン (5) をこの座標 x_1,x_2 で書き表すと

$$L(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)=\frac{1}{2}(\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2)+\kappa\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}. \qquad (6)$$

記号の煩雑さを避けるために，変数の時間微分 dx_1/dt などを上に・をつけて $\dot{x}_1$ のように書くことにする．

運動，すなわち，座標 $x_i(t)$ の時間依存性は**ラグランジュの方程式**

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}=0, \quad (i=1,2) \qquad (7)$$

の解として決まる．実際に，ラグランジアン (6) から作ったラグランジュの方程式は

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}=-\kappa\frac{x_1}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^{\frac{3}{2}}}-\ddot{x}_1=0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = -\kappa \frac{x_2}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^{\frac{3}{2}}} - \ddot{x}_2 = 0$$

となり，これは式 (1) を各座標成分にわけて書いたものに他ならない．

運動方程式をラグランジュの方程式の形に書き表すことのメリットはいろいろあるが，保存則と対称性の関係が一般的な枠組みで議論できるようになるというのもその一つである．そこでは，**ネーターの定理**と呼ばれる定理が鍵になる．

系を記述する変数に対してある変数変換を行ったとき，ラグランジアンの関数形が変換の後も変換前と同じであれば，ラグランジアンはこの変換で**不変**，あるいは**対称**であると言う．変換の後で関数形が代わらないということの意味をもう少し詳しく述べよう．

具体的な例で説明しよう．上では，ラグランジアンを力の中心を原点とした直交座標 x_1, x_2 とその時間微分 $\dot{x}_1, \dot{x}_2$ の関数として書き表した．しかし，物体の位置を表す座標として，この座標を使わなければいけないということはない．極座標で表してもよいし，もっと一般の座標で表してもよいはずである．そこで，2 つの適当な 2 変数関数 $X_1(\cdot,\cdot)$ と $X_2(\cdot,\cdot)$ を使って，

$$\begin{aligned} X_1(t) &= X_1(x_1(t), x_2(t)), \\ X_2(t) &= X_2(x_1(t), x_2(t)) \end{aligned} \tag{8}$$

と別の座標 $X_1(t), X_2(t)$ を定義する（考えているのが，運動している質点の位置座標だということをはっきりさせるために時間 t を顕わに書いた）．ただし，X_1, X_2 が座標と呼ばれるためには，(x_1, x_2) と (X_1, X_2) が 1 : 1 に対応している必要がある．言い換えると，上の 2 つの関数は，(8) が逆に解けて

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_1(X_1(t), X_2(t)), \\ x_2(t) &= x_2(X_1(t), X_2(t)) \end{aligned} \tag{9}$$

と (x_1, x_2) も (X_1, X_2) の関数として表せるようなものでなければならない．以下座標変換という言葉を使うときには，このことは成り立っていることにする．

式 (9) より

$$\dot{x}_i = \frac{\partial x_i}{\partial X_1}\dot{X}_1 + \frac{\partial x_i}{\partial X_2}\dot{X}_2 \tag{10}$$

と書けることに注意して，$L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ の $x_i, \dot{x}_i$ に上の (9), (10) の右辺を代入したものは $X, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2$ の関数と読めるが，その関数形は一般には元の L とは異なる．そこで，これを $L'(X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2)$ と書くことにする：

$$L'(X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2) \equiv L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \tag{11}$$

この L' が関数形として L に一致する，すなわち，

$$L(X_1, X_2, \dot{X}_1, \dot{X}_2) = L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \tag{12}$$

が成り立つときに，ラグランジアン L は，(8) で表される座標の変換 $(x_1, x_2) \mapsto (X_1, X_2)$ の下で不変である，あるいは，L はこの変換に関して対称であると言う．

例を挙げよう．変換 (8) として，原点（力の中心）の周りの角度 θ の回転

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1\cos\theta - x_2\sin\theta, \\ X_2 &= x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{aligned} \tag{13}$$

を考えよう．このとき

$$X_1^2 + X_2^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$$

が成り立つから，この変換でラグランジアン (6) は不変である．別の変換の例として平行移動

$$X_1 = x_1 + a, \quad X_2 = x_2 + b \tag{14}$$

を考える．この場合には

$$\dot{X}_1^2 + \dot{X}_2^2 = \dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2$$

は成り立つが，

$$x_1^2 + x_2^2 = (X_1 - a)^2 + (X_2 - b)^2$$

となって，ラグランジアン (6) の第 1 項は変わらないが，第 2 項は X_i の関数としてみると形を変えてしまう．ラグランジアン (6) は変換 (14) では不変ではないことになる．力の中心という特別な点があるのだから当然といえば当然である．

4. ネーターの定理

回転の場合に戻ろう．上に見たようにラグランジアン (6) は任意の角度の回転で不変だから，回転角が無限小の回転についても不変である．回転角度 θ が無限小の角度 ϵ だとして，ϵ の 1 次までとると，(13) は

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 - \epsilon x_2, \\ X_2 &= x_2 + \epsilon x_1 \end{aligned} \tag{15}$$

となる．ラグランジアンが不変であることを表す式 (11) にこれを代入すると

$$\begin{aligned} &L(x_1 - \epsilon x_2, x_2 + \epsilon x_1, \dot{x}_1 - \epsilon \dot{x}_2, \dot{x}_2 + \epsilon \dot{x}_1) \\ &= L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \end{aligned} \tag{16}$$

ϵ が無限小であることに注意して，上の左辺を ϵ について展開して 1 次までとると，0 次の項は右辺と打ち消し合い

$$\epsilon \left(-\frac{\partial L}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial L}{\partial x_2} x_1 - \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 \right) = 0 \tag{17}$$

となる．ここまでの議論では，**無限小変換** (15) でラグランジアン $L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2)$ が不変だということを使っているだけで，$(x_1(t), x_2(t))$ が t にどう依存するかに関係なく式 (17) は成り立つ．$x_1(t), x_2(t)$ が運動方程式，すなわち，ラグランジュ方程式 (7) に従う現実の運動の場合には

$$\frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}, \quad (i = 1, 2) \tag{18}$$

が成り立つから，式 (17) の左辺は ϵ を除いて

$$\begin{aligned} &-\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \right) x_2 + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} \right) x_1 \\ &-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{x}_1 \\ &= \frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} x_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} x_1 \right) \end{aligned}$$

と書ける．すなわち，$(x_1(t), x_2(t))$ が運動方程式に従って変化していくとき

$$\frac{d}{dt} \left(-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} x_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} x_1 \right) = 0$$

となり，保存則

$$-\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} x_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} x_1 = 一定$$

が成り立つ．ケプラー運動のラグランジアン (6) を用いて左辺を計算すれば

$$-\dot{x}_1 x_2 + \dot{x}_2 x_1 = 一定$$

と書ける．この左辺は，角運動量 $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$ の軌道面に垂直な成分

$$l_3 = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 = 2 \times 面積速度$$

に他ならない．無限小回転 (15) の下でラグランジアンが不変であることの帰結として "面積速度が一定" という保存則が導かれたわけである．

この議論はもっと一般化できる．無限小変換 (15) をもっと一般にして

$$\begin{aligned} X_1 &= x_1 + \epsilon S_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2), \\ X_2 &= x_2 + \epsilon S_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) \end{aligned} \tag{19}$$

を考える．上の無限小回転の場合は

$$\begin{aligned} S_1(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= -x_2, \\ S_2(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2) &= x_1 \end{aligned}$$

であるが，ここではもっと一般に x_i と $\dot{x}_i$ が混ざるような変換も考えることにする．S_i も 1 次式とは限らずもっと一般の関数であるとしてよい．

この変換で考えている運動のラグランジアンが不変であるとする：

$$\begin{aligned} &L(x_1 - \epsilon S_1, x_2 + \epsilon S_2, \dot{x}_1 - \epsilon \dot{S}_1, \dot{x}_2 + \epsilon \dot{S}_2) \\ &= L(x_1, x_2, \dot{x}_1, \dot{x}_2). \end{aligned} \tag{20}$$

左辺を ϵ について展開して 1 次までとると，0 次は右辺と消し合い

$$\epsilon \left(\frac{\partial L}{\partial x_1} S_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} S_2 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{S}_1 + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} \dot{S}_2 \right) = 0 \tag{21}$$

となる．座標 $x_1(t), x_2(t)$ がラグランジュ方程式に従う現実の運動の場合には，式 (18) が成り立ち，式 (21) は

$$\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\right)S_1+\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\right)S_2+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\dot{S}_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\dot{S}_2$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}S_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}S_2\right)=0 \qquad (22)$$

と書き換えられ，

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}S_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}S_2=\text{一定} \qquad (23)$$

という保存則が導かれる．

まとめると，あるラグランジアン L が無限小変換 (19) の下で不変であるならば，

$$I=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}S_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}S_2 \qquad (24)$$

は保存量になる．この命題はネーターの定理と呼ばれる．

この定理はもう少し拡張できる．ラグランジアン L が無限小変換 (19) で不変ではないが

$$L(x_1-\epsilon S_1, x_2+\epsilon S_2, \dot{x}_1-\epsilon\dot{S}_1, \dot{x}_2+\epsilon\dot{S}_2)$$
$$-\ L(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)=\epsilon\frac{d}{dt}\Lambda(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2) \qquad (25)$$

のように，変換に伴う L の変化が何かある関数 Λ の時間微分になっているとき，L はこの変換の下で**準不変**であると言う．この場合にも保存量が存在する．証明は簡単である．式 (25) の左辺を式 (22) のように計算すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}S_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}S_2\right)=\frac{d}{dt}\Lambda(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2).$$

したがって，

$$I'=\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}S_1+\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}S_2-\Lambda(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2) \qquad (26)$$

は保存量である．拡張されたこの定理もネーターの定理と呼ばれる．

5. ルンゲ・レンツのベクトルの保存と対称性

少し唐突だが，$S_1=-x_2\dot{x}_2$, $S_2=x_1\dot{x}_2$ で定義される無限小変換

$$X_1=x_1-\epsilon x_2\dot{x}_2,$$
$$X_2=x_2+\epsilon x_1\dot{x}_2 \qquad (27)$$

を考えてみよう．

t で微分すると

$$\dot{X}_1=\dot{x}_1-\epsilon(\dot{x}_2^2+x_2\ddot{x}_2),$$
$$\dot{X}_2=\dot{x}_2+\epsilon(\dot{x}_1\dot{x}_2+x_1\ddot{x}_2).$$

無限小量 ϵ の 1 次までとると

$$X_1^2+X_2^2=x_1^2+x_2^2$$

は成り立つが，

$$\dot{X}_1^2+\dot{X}_2^2=\dot{x}_1^2+\dot{x}_2^2-2\epsilon(x_2\dot{x}_1-x_1\dot{x}_2)\ddot{x}_2$$

となり，式 (6) で与えられるケプラー運動のラグランジアン L はこの変換で不変ではない．変換に伴うラグランジアンの変化は

$$L(X_1,X_2,\dot{X}_1,\dot{X}_2)-L(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)$$
$$=-\epsilon(x_2\dot{x}_1-x_1\dot{x}_2)\ddot{x}_2 \qquad (28)$$

と書ける．$x_2(t)$ が運動方程式を満たす現実の運動では

$$\ddot{x}_2=-\kappa\frac{x_2}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^3}$$

であるから，(28) の右辺は

$$\epsilon\kappa\frac{\dot{x}_1x_2^2-x_1x_2\dot{x}_2}{(\sqrt{x_1^2+x_2^2})^3}=\frac{d}{dt}\left(\kappa\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) \qquad (29)$$

と変形できる．変換 (27) に伴う L の変化は，式 (25) のようにまとまり，そこでの Λ は

$$\Lambda(x_1,x_2,\dot{x}_1,\dot{x}_2)=\kappa\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

となる．この Λ を使って，式 (26) で与えられる保存量 I' を計算すると

$$I'=(x_1\dot{x}_2-\dot{x}_1x_2)\dot{x}_2-\kappa\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}.$$

これは，(4) で定義したルンゲ・レンツのベクトル $\boldsymbol{e}$ の x_1 成分を (x_1,x_2) 座標で書き表したものに

なっている．

無限小変換

$$X_1 = x_1 + \epsilon x_2 \dot{x}_1, \quad X_2 = x_2 - \epsilon x_1 \dot{x}_1$$

を考え，同様の計算をすると $\boldsymbol{e}$ の x_2 成分も保存することが導かれる．この計算は練習問題として読者に任せよう．

ルンゲ・レンツのベクトルの保存は，現実の運動空間（この場合は軌道面という2次元平面）での座標変換ではなく，x_i と $\dot{x}_i$ を混ぜ合わせるもっと一般の変換の下でのラグランジアンの準不変性と関係しているわけである．

6. まとめと付け足し

ラグランジアンの不変性（対称性）と保存則の関係を与えるネーターの定理をケプラー運動を例にして説明した．そしてそのネーターの定理を使って，角運動量とルンゲ・レンツのベクトルというケプラー運動がもつ2つの保存量がどのような対称性の帰結なのかを見てきた．角運動量は無限小回転の下での不変性（対称性）の結果だった．この変換は，粒子が運動している現実の空間の点の座標の間の変換，すなわち，X_i が x_i の関数として与えられる変換（このような変換を**点変換**と言う）である．それに対し，ルンゲ・レンツのベクトルの保存は x_i と $\dot{x}_i$ が混ざる変換，X_i が x_i だけでなく $\dot{x}_i$ にも依存した関数として与えられるような変換での対称性の帰結だった．ケプラー運動を材料にして議論を進めてきたが，一般の無限小変換 (19) の下での不変性，あるいは準不変性から，(24) で与えられる I，あるいは (26) で与えられる I' が保存することを示した上の議論の中ではラグランジアンの具体的な関数形はどこでも使っていない．そこでの議論はケプラー運動を離れて一般的なものである．ケプラー運動に沿って話を進めてきたので，2変数（自由度が2）の場合での議論になっているが，添字の走る範囲を1から N にすれば，上の一般論が N 自由度の場合に拡張できることは容易に見て取れるであろう．

ラグランジアンがある変換で不変ならば，それに応じてある保存量が存在するというのがネーターの定理であったが，その逆は成り立つか，すなわち，何かある保存量があれば，それに対応してラグランジアンを不変（あるいは準不変）にする変換があるかという問題は興味のある問題である．ラグランジアンに多少の制限は付くが，保存量に対してそれに対応した変換の存在を示すことができる．詳しくは，下に挙げる文献 2) を見ていただきたい．それも含めてもっときちんとした一般論を勉強したい読者はしかるべき解析力学の教科書（例えば以下の文献 2〜4)）を読んでいただきたい．

ケプラー運動と 2 次元調和振動の間には面白い関係があり，ルンゲ・レンツのベクトルの保存を 2 次元調和振動と関連させる興味深い議論が文献 5) にある．一読をお薦めする．

ハミルトン形式での運動の記述で，対称性と保存則の関係を説明することはできなかったが，興味のある方は，拙文（文献 6)）を見ていただきたい．

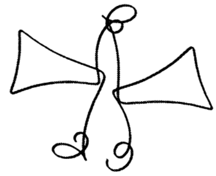
参考文献

1) アーサー．ケストラー著 小尾信弥・木村 博訳『ヨハネス・ケプラー』ちくま学芸文庫（筑摩書房，2008）．河出書房新社発行の「現代の科学」というシリーズの 1 冊として出版され，長く絶版になっていたものの復刊．
2) 大貫義郎・吉田春夫『力学』（岩波書店，1994）．
3) 佐藤文隆『対称性と保存則』岩波講座 物理の世界（岩波書店，2004）．
4) 江沢 洋『解析力学』（培風館，2007）．
5) 山本義隆『力学と微分方程式』（数学書房，2008）．
6) 中村孔一「数理科学」2006 年 5 月号 p.12–17.

（なかむら・こういち，明治大学法学部）

シュレーディンガー方程式とディラック方程式における対称性

量子力学



新井 朝雄

1. はじめに

本稿の主題であるシュレーディンガー方程式とディラック方程式は，いずれも量子力学における原理的な基礎方程式である．これらの方程式は，その一般的形態においては，時間変数 $t \in \mathbb{R}$ と N 個の空間変数 $\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_N$ ($\boldsymbol{x}_j \in \mathbb{R}^3, j = 1, \cdots, N$) に関する偏微分方程式である*1)．この場合の自然数 N は，量子系を構成する量子的粒子の個数を表す（このような量子系は N 体系と呼ばれる）．これらの方程式に関して第一義的に重要なことは，言うまでもなく，その解を求めることである．だが，これは一般には容易な仕事ではない．というのは，シュレーディンガー方程式とディラック方程式はポテンシャルと呼ばれる関数を含み，解が存在するか否か，あるいは解が存在する場合に，解が明示的な表示（“よくわかった” 関数を用いての表示）をもつかどうかは，ポテンシャルの性質に依存するからである*2)．そこで，視点を変えて，方程式を解かなくても，解について，方程式の構造だけからわかる性質を探求することを考える．明示的な解が求められる問題だけに親しんできた人にとっては，そのような探求を可能にする方法があるのかと訝しく思われるかもしれない．だが，実際，それは存在する．その種の方法の基礎の一つを与えるのが本稿のもう一つの主題，すなわち，対称性である．対称性の考察は，解の一般的構造に関する知見を得ることを可能にするだけでなく，実は，明示的な解を求める上でも役立つのである．

数学のほぼ全領域を貫く根源的で普遍的な理念としての対称性は，物理現象のコンテクストにおいては，時間や空間，あるいは内部自由度（例えば，素粒子のスピン）の空間における変換に関するある種の不変性あるいは規則性として現れる．本稿の目的は，この意味での対称性がシュレーディンガー方程式とディラック方程式の場合にどのような形をとるかを，ごく初歩的な部分に限定して，叙述することである．

具象的な数学的対象が有する対称性は，普遍的理念としての対称性がその対象の個別的な特性に応じて具現化したものである．このように考えることにより，無数に存在する個別的対称性を統一的に俯瞰する観点が得られる．この見地から，以下では，まず，対称性の一般概念について手短に解説することから始める．

*1) $\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$\mathbb{R}^3 = \{\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) | x^1, x^2, x^3 \in \mathbb{R}\}$ は 3 個の実数の組の全体を表す．

*2) 解が明示的に求められる場合もある（その最も簡単な場合はポテンシャルが無い場合であり，このような量子系は自由系と呼ばれる）．通常，物理学の教科書で扱われるのは，ほとんどそのような場合だけである．だが，数学的・一般的観点から言えば，それはごく特殊な場合である．このことをはっきりと認識しておくことは重要である．

2. 対称性の一般概念

X を空でない任意の集合とする．f を X 上の写像，すなわち，各 $x \in$ X に対して，X の元（要

素) $f(x)$ を唯一つ定める対応とする(このことを，$f: \mathsf{X} \to \mathsf{X}; x \mapsto f(x)$ と記す)．X の空でない部分集合 D に対して，$f(\mathsf{D}) := \{f(x)|x \in \mathsf{D}\}$ を f による D の**像**と言う*3)．f が全単射*4)であるとき，f を X 上の**変換**と呼ぶ．

集合 X 上の変換は，描像的に言えば，諸々の具象的な集合における幾何学的 "操作" (例えば，$\mathbb{R}^3$ における並進(平行移動)や回転)を抽象的な水準で捉えたものである．集合 X の空でない部分集合を X の**図形**と呼ぶ．図形の対称性は，その最も単純な形式においては，ある一つの幾何学的操作に関する不変性である．こうして，次の定義に到る：集合 X の図形 D が X 上の変換 f の作用の下で不変，すなわち，$f(\mathsf{D}) = \mathsf{D}$ が成り立つとき，「D は f 対称である」と言い，f を D の**対称性変換**と呼ぶ．次の事実は容易に証明される：(S.1) f が D の対称性変換ならば，f の逆写像 f^{-1} も D の対称性変換である*5)．(S.2) f, g が D の対称性変換ならば，合成写像 fg も D の対称性変換である*6)．これらの性質は，D の対称性変換全体の集合

$$\mathcal{S}_{\mathsf{D}} := \{f|f \text{ は D の対称性変換}\}$$

の基本的構造を表す．しかも，D は X の任意の空でない部分集合であったから，(S.1) と (S.2) は普遍的な性質である．こうして，X 上の写像を元とする集合に関わる，ある普遍的な概念が示唆される．それが，次に定義する変換群の概念である：

集合 Γ が次の性質 (Γ.1)〜(Γ.3) を有するとき，Γ を X 上の**変換群**と言う：(Γ.1) Γ の各元は X 上の変換である．(Γ.2) 任意の $f, g \in \Gamma$ に対して，$fg \in \Gamma$．(Γ.3) 任意の $f \in \Gamma$ に対して，$f^{-1} \in \Gamma$．

性質 (S.1), (S.2) と変換群の定義から明らかなように，$\mathcal{S}_{\mathsf{D}}$ は X 上の変換群である．この変換群は D の**対称群**と呼ばれる．

一般に，X の図形 D が変換群 Γ の各元に関して対称，すなわち，$g(\mathsf{D}) = \mathsf{D}, \forall g \in \Gamma$ が成り立つとき，「D は変換群 Γ に関する対称性をもつ」あるいは「D は Γ 対称である」と言う．

変換群 Γ の部分集合 Σ が X 上の変換群であるとき，Σ を Γ の**部分変換群**と呼ぶ．この概念は，Γ 全体に関する対称性ではなく，部分的な対称性を記述するために有用である．

変換群の定義において，集合 X を捨象することにより，変換群を特殊な場合として含む，より一般的な概念へ到ることができる：集合 G の任意の 2 つの元 a, b に対して，G の元 ab が定義されていて，次の性質 (G.1)〜(G.3) が成立するとき，G を**群**と呼ぶ：(G.1) (結合則) $a(bc) = (ab)c,\ a, b, c \in \mathsf{G}$．(G.2) (単位元の存在) ある元 $e \in \mathsf{G}$ が存在して $ae = ea = a, a \in \mathsf{G}$ が成り立つ．e を**単位元**と呼ぶ．(G.3) (逆元の存在) 各 $a \in \mathsf{G}$ に対して，$a^{-1} \in \mathsf{G}$ が存在して $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ が成り立つ．a^{-1} を a の**逆元**と呼ぶ．

例 2.1 3 次の実正方行列 $R = (R^i_j)$ (R^i_j は R の (i, j) 成分) で ${}^{\mathrm{t}}RR = I_3$ (${}^{\mathrm{t}}R$ は R の転置行列，I_3 は 3 次の単位行列) を満たすものは**直交行列**と呼ばれる．3 次直交行列の全体を $O(3)$ とすれば，これは行列の積演算に関して群をなす．この群を **3 次直交群**と言う．各 $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ と $R \in O(3)$ に対して，$R\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ を $(R\boldsymbol{x})^i := \sum_{j=1}^3 R^i_j x^j, \boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3), i = 1, 2, 3$ によって定義すれば，R は $\mathbb{R}^3$ 上の変換と見ることができる．この場合，R は広義の意味での回転—**広義回転**—を表す．R を $\mathbb{R}^3$ 上の変換と見る場合，$O(3)$ は $\mathbb{R}^3$ 上の変換群となる．写像 $I_{\mathrm{s}} := -I_3$ は $O(3)$ の元であり，**空間反転**と呼ばれる ($I_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{x}) := -\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ に注意)．

直交群 $O(3)$ の元 R でその行列式 $\det R$ が 1 のものは，$\mathbb{R}^3$ 上の (原点に関する) **回転**と呼ばれる．回転の全体 $SO(3) := \{R \in O(3)|\det R = 1\}$ は $O(3)$ の部分変換群をなす．この部分変換群を **3**

---

*3) 「$A := B$」は，B によって A を定義することを表す．

*4) $x_1 \neq x_2$ ($x_1, x_2 \in \mathsf{X}$) ならば $f(x_1) \neq f(x_2)$ が成り立つとき，f は**単射**または **1 対 1** であると言う．また，$f(\mathsf{X}) = \mathsf{X}$ のとき，f は**全射**であると言う．全射かつ単射である写像を**全単射**と言う．

*5) $f^{-1}(x) := y_x, x \in \mathsf{X}$．ただし，各 $x \in \mathsf{X}$ に対して，$y_x \in \mathsf{X}$ は $f(y_x) = x$ となる元 (f の全単射性により，y_x は x により唯一つ定まる)．

*6) $(fg)(x) := f(g(x)), x \in \mathsf{X}$．

次元回転群と呼ぶ．空間反転 I_s は $SO(3)$ の元ではない．

Γ を X 上の任意の変換群としよう．このとき，X 上の複素数値関数全体の集合 $\mathcal{F}(\mathsf{X}) := \{F : \mathsf{X} \to \mathbb{C}\}$ 上の変換群が次のようにして構成される．各 $g \in \Gamma$ に対して，$\mathcal{F}(\mathsf{X})$ 上の写像 $\rho(g) : \mathcal{F}(\mathsf{X}) \to \mathcal{F}(\mathsf{X}); F \mapsto \rho(g)F$ を

$$(\rho(g)F)(x) := F(g^{-1}(x)), \quad x \in \mathsf{X} \qquad (1)$$

によって定義する．このとき，$\rho(g)$ は $\mathcal{F}(\mathsf{X})$ 上の変換であり

$$\rho(g)^{-1} = \rho(g^{-1}),$$
$$\rho(g_1)\rho(g_2) = \rho(g_1 g_2), \quad g, g_1, g_2 \in \Gamma$$

が成り立つ．ゆえに $\{\rho(g) | g \in \Gamma\}$ は $\mathcal{F}(\mathsf{X})$ 上の変換群である．

任意の $F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{X})$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，和 $F + G \in \mathcal{F}(\mathsf{X})$ とスカラー倍 $\alpha F \in \mathcal{F}(\mathsf{X})$ を $(F+G)(x) := F(x) + G(x), (\alpha F)(x) := \alpha F(x), \forall x \in \mathsf{X}$ によって定義すれば，$\mathcal{F}(\mathsf{X})$ は複素ベクトル（線形）空間になる．さらに，各 $g \in \Gamma$ に対して，$\rho(g)$ は線形な写像である．すなわち，$\rho(g)(\alpha F + \beta G) = \alpha\rho(g)F + \beta\rho(g)G, \alpha, \beta \in \mathbb{C}, F, G \in \mathcal{F}(\mathsf{X})$ が成り立つ．

ここにはある特徴的な構造が現れている．一般に，任意の複素ベクトル空間 V に対して，V 上の線形かつ全単射な写像の全体 $GL(\mathsf{V})$ は V 上の変換群をなす．この変換群を V 上の**一般線形群**と呼ぶ．群 G から $GL(\mathsf{V})$ への写像 $\eta : \mathsf{G} \to GL(\mathsf{V}); a \mapsto \eta(a)$ が $\eta(ab) = \eta(a)\eta(b), a, b \in \mathsf{G}$ を満たすとき，η を**群 G の V 上での表現**と言い，V をその**表現空間**と呼ぶ．これは，つまり，群 G の構造を V 上の一つの変換群の構造として表したものである[*7)]．特に，すべての $a \in \mathsf{G}$ に対して，$\eta(a)$ 不変となる部分空間 $\mathsf{W} \subset \mathsf{V}$(i.e., $\eta(a)(\mathsf{W}) \subset \mathsf{W}, \forall a \in \mathsf{G}$) が $\{0\}$ または V のどちらかに限られるとき，表現 η は**既約**であると言う．

いま導入した概念で語るならば，上述の $\rho : \Gamma \to GL(\mathcal{F}(\mathsf{X}))$ は，変換群 Γ のベクトル空間 $\mathcal{F}(\mathsf{X})$ 上での表現なのである．

*7)　$\{\eta(a) | a \in \mathsf{G}\}$ は V 上の変換群になる．

3. シュレーディンガー方程式

簡単のため，1 体系のシュレーディンガー方程式を考える（第 1 節の記号で $N = 1$ の場合）．シュレーディンガー方程式には 2 つの型がある．すなわち，時間依存型とそうでない型である．まず，前者の型のシュレーディンガー方程式における対称性を考察する．

3.1 時間依存型シュレーディンガー方程式

4 次元時空 $M := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{(t, \boldsymbol{x}) | t \in \mathbb{R}, \boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R}^3\}$ 上の複素数値関数 $\psi : M \to \mathbb{C}$（M から $\mathbb{C}$ への写像）；$(t, \boldsymbol{x}) \mapsto \psi(t, \boldsymbol{x})$ を未知関数とする，次の 2 階偏微分方程式を考える：

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t, \boldsymbol{x}) + V(\boldsymbol{x})\psi(t, \boldsymbol{x}). \qquad (2)$$

ただし，i は虚数単位，$\hbar > 0$ と $m > 0$ は定数，$\Delta := \sum_{j=1}^{3} \partial_j^2 (\partial_j := \partial/\partial x^j, j = 1, 2, 3)$ は **3 次元ラプラシアン**と呼ばれる偏微分作用素，$V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ は与えられた実数値関数である．方程式 (2) は，量子力学のコンテクストでは，質量 m の非相対論的な量子的粒子 1 個がポテンシャル V の作用の下に存在している系の状態の時間発展を記述し（この場合，$\hbar$ は，物理的には，プランクの定数 h を 2π で割った定数を表す），**時間依存型シュレーディンガー方程式**と呼ばれる[*8)]．この範疇の量子系の状態は，一般に，$\mathbb{R}^3$ 上の零でない複素数値関数 $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ で絶対 2 乗

*8)　「非相対論的」における「相対論的」は，アインシュタインの特殊相対性理論の意味でのそれである．ところで，古典的物質場の理論においても，(2) と同じ形の方程式が現れる．この場合には，(2) を**ド・ブロイ場の方程式**と言う（文献 8) や文献 3) の 7.7 節を参照）．無論，方程式の形は同じでも，量子力学と古典的物質場の理論では，その物理的解釈は異なる．だが，この点については，量子力学の発展史上，不幸にして，概念的な混乱が見られた．両理論の概念的な違いをこの上なく明晰な形で論じている本として名著 8) がある．ついでに言えば，ド・ブロイ場の “量子化” は**非相対論的な量子場**のクラスの一つを与える．

可積分条件 $\|\phi\|^2 := \int_{\mathbb{R}^3} |\phi(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x} < \infty$ を満たすものによって記述される．ただし，定数倍だけ異なる，零でない関数は同じ状態を表す（量子力学的状態の相等原理）．シュレーディンガー方程式 (2) の解 $\psi \neq 0$ で，各 $t \in \mathbb{R}$ に対して定まる写像 $\psi(t,\cdot) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}; \boldsymbol{x} \mapsto \psi(t,\boldsymbol{x})$ が $\|\psi(t,\cdot)\|^2 < \infty, \forall t \in \mathbb{R} \cdots (*)$ を満たすならば，$\psi(t,\cdot)$ は時刻 t における系の状態を表す．

シュレーディンガー方程式 (2) の解 ψ で $(*)$ を満たすものすべてからなる集合を $\mathsf{S}_V \neq \emptyset$ とし，これを (2) の**解空間**と言う*9)．これは，M 上の複素数値関数全体からなる集合 $\mathcal{F}(M)$ の図形である．さらに，S_V は関数の和とスカラー倍で閉じていること，すなわち，$\psi_1, \psi_2 \in \mathsf{S}_V$ ならば $\alpha_1\psi_1 + \alpha_2\psi_2 \in \mathsf{S}_V, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ が成り立つことも容易にわかる．したがって，S_V は $\mathcal{F}(M)$ の部分空間である．

以下，時間依存型シュレーディンガー方程式 (2) が有する対称性を解空間 S_V に関して考察する．

3.1.1 自由なシュレーディンガー方程式におけるガリレイ対称性

方程式 (2) において，ポテンシャル V が 0 の場合を考えると，**自由なシュレーディンガー方程式**

$$i\hbar \frac{\partial \psi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(t,\boldsymbol{x}) \qquad (3)$$

が得られる．これは外力が働いていない量子的粒子—自由な量子的粒子—の状態の時間発展を記述する．自由なシュレーディンガー方程式 (3) の解空間を S_0 としよう．

すでに言及したように，シュレーディンガー方程式は非相対論的な方程式である．この観点からは，シュレーディンガー方程式 (2) に関わる時空 M は**ガリレイ時空**と呼ばれる時空でなければならない*10)．ガリレイ時空には**ガリレイ変換**と呼ばれる変換が作用する．これは，広義回転 $R \in O(3)$ と 4 次元ベクトル $a = (a_0, \boldsymbol{a}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^4$ および 3 次元ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^3$（速度を表す）の組 $(\boldsymbol{v}, a, R)$ ごとに定まり，次の式によって定義される：各 $(t, \boldsymbol{x}) \in M$ に対して

$$g_{(\boldsymbol{v},a,R)}(t,\boldsymbol{x}) := (t + a_0, R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}(t + a_0)).$$

ガリレイ変換 $g_{(\boldsymbol{v},a,R)} : M \to M$ は，幾何学的には，まず，時空の空間点 $\boldsymbol{x}$ を直交行列 R によって広義の意味で回転し $(\boldsymbol{x} \mapsto R\boldsymbol{x})$，次に，ベクトル $a \in \mathbb{R}^4$ による時空並進 $(t, R\boldsymbol{x}) \mapsto (t+a_0, R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})$ を行い，最後に，速度 $\boldsymbol{v}$ の等速運動による空間並進 $(t + a_0, R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a}) \mapsto (t + a_0, R\boldsymbol{x} + \boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}(t + a_0))$ を施すことを意味する*11)．

ガリレイ変換の全体は M 上の変換群であることが示される．この変換群を $\mathcal{G}$ と記し，**ガリレイ群**と呼ぶ．各ガリレイ変換 $g = g_{(\boldsymbol{v},a,R)} \in \mathcal{G}$ に対して，$\mathcal{F}(M)$ 上の写像 $\rho_{\mathrm{G}}(g) : \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ を次のように定義する：各 $\psi \in \mathcal{F}(M)$ と各 $(t, \boldsymbol{x}) \in M$ に対して

$$(\rho_{\mathrm{G}}(g)\psi)(t,\boldsymbol{x}) := e^{i(m\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} - \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 t)/\hbar} \psi(g^{-1}(t,\boldsymbol{x})). \qquad (4)$$

ただし，$\boldsymbol{v}\boldsymbol{x} := \sum_{j=1}^3 v^j x^j, \boldsymbol{v}^2 := \sum_{j=1}^3 (v^j)^2$.

定理 3.1 ψ が自由なシュレーディンガー方程式 (3) の解ならば，任意のガリレイ変換 $g \in \mathcal{G}$ に対して $\rho_{\mathrm{G}}(g)\psi$ も (3) の解である．さらに，S_0 は $\rho_{\mathrm{G}}(g)$ 対称である：$\rho_{\mathrm{G}}(g)(\mathsf{S}_0) = \mathsf{S}_0$.

この定理に述べられた性質を**自由なシュレーディンガー方程式のガリレイ対称性**と言う．ここで，次の二点を注意しておこう．

(i) 自由なシュレーディンガー方程式 (3) の解は

---

*9) 解の存在については，ここでは議論しない．これは，ヒルベルト空間上の作用素論を用いて考察することにより，数学的に厳密かつ明晰に論じることができる．その結果，非常に広いクラスの V に対して，方程式 (2) の解の存在が証明される．詳しくは，文献 1) の 6.5 節や文献 6) の 3.5 節を参照．

*10) 単なるアファイン空間としての M にはいろいろな計量的構造が入る．その計量的構造を変えることにより，相異なる時空概念が得られる．ガリレイ時空や後出のミンコフスキー空間はそのような時空の例である．

*11) 誤解はないと思うが，念のために言っておけば，ここで考えているガリレイ変換は M 上の写像であって座標変換ではない（座標変換は，M の点は動かさず，点の座標表示を取り換える手続きであり，M 上の写像とは異なる概念である）．後に言及するユークリッド的合同変換，時間反転，ローレンツ変換，ポアンカレ変換についても同様のことが当てはまる．

明示的な表示をもつ*12)．だが，定理3.1は，明示的な解を求めることなしに，方程式(3)だけから証明される．

(ii) $\boldsymbol{v} \neq \mathbf{0}$ の場合，$\rho_{\mathrm{G}}(g)$ の定義(4)において，指数因子 $e^{i(m\boldsymbol{vx}-\frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2t)/\hbar}$ が必要である((1)との違いに注意)．これは，詳細は略すが，$\rho_{\mathrm{G}}:\mathcal{G}\to GL(\mathcal{F}(M));g\mapsto\rho_{\mathrm{G}}(g)$ がガリレイ群の（通常の意味での）表現ではなく，より一般的な**射影表現**（射線表現）と呼ばれる範疇の表現であることを意味するものであって，物理的にも数学的にもたいへん興味深い構造の一つである*13)．

3.2 一般の場合の時間依存型シュレーディンガー方程式

ポテンシャル $V\neq 0$ が定数でない場合には，解空間 S_V は，例えば，ガリレイ変換 $g_{(\boldsymbol{v},0,I_3)}$ $(\boldsymbol{v}\neq\mathbf{0})$ に対して $\rho_{\mathrm{G}}(g_{(\boldsymbol{v},0,I_3,0)})$ 対称ではない．だが，S_V は，ガリレイ群 $\mathcal{G}$ のある部分変換群に対しては，対称性をもち得る．

各 $R\in O(3)$ と各 $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$(\boldsymbol{a},R)(\boldsymbol{x}) := R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ によって定義される写像 $(\boldsymbol{a},R):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ は**ユークリッド的合同変換**と呼ばれる．これは，幾何学的には，ユークリッド空間としての $\mathbb{R}^3$ 上の広義回転と並進の合成が生み出す変換である．ユークリッド的合同変換の全体 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3):=\{(\boldsymbol{a},R)|R\in O(3),\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3\}$ は $\mathbb{R}^3$ 上の変換群であり，**ユークリッド的合同変換群**と呼ばれる．各 $(\boldsymbol{a},R)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ に対して，$g_{\boldsymbol{a},R}:=g_{(\mathbf{0},(0,\boldsymbol{a}),R)}$ はガリレイ変換であり，$\{g_{\boldsymbol{a},R}|R\in O(3),\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3\}$ はガリレイ群 $\mathcal{G}$ の部分変換群である．

一般に，関数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ が $R\in O(3)$ と $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ に対して，$f(R\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a})=f(\boldsymbol{x}),\forall\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ を満たすとき，f は $(\boldsymbol{a},R)$ **対称**であると言う．

次の定理はシュレーディンガー方程式(2)の部分的なガリレイ対称性に関するものである：

定理 3.2 ある $R\in O(3)$ とある $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^3$ に対して，V が $(\boldsymbol{a},R)$ 対称ならば，S_V は $\rho_{\mathrm{G}}(g_{\boldsymbol{a},R})$ 対称である．すなわち，$\rho_{\mathrm{G}}(g_{\boldsymbol{a},R})(\mathsf{S}_V)=\mathsf{S}_V$ が成り立つ．

この定理において，ポテンシャル V の対称性がシュレーディンガー方程式(2)の解空間 S_V の対称性を導くことに注意しよう．

注意 3.3 $N\geq 2$ に対する N 体系のシュレーディンガー方程式の場合には，含まれるポテンシャルが空間変数の差 $\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{x}_k$ $(j\neq k,j,k=1,\cdots,N)$ だけに依存するならば，解空間はガリレイ対称性をもつ．この項で考察したシュレーディンガー方程式(2)は，物理的には，ポテンシャル部分が $V(\boldsymbol{x}_1-\boldsymbol{x}_2)$ で与えられる，2体系のシュレーディンガー方程式からのある種の還元によって得られるものと見るのが自然であり（詳しくは，文献4)の2.3.4項を参照），この観点からは，$V\neq 0$ が定数でない場合には，解空間 S_V に対して，ガリレイ群全体に関する対称性が成立しないのはむしろ当然と言うべきなのである．

ガリレイ群に含まれない，M 上の変換として，**時間反転**：$(t,\boldsymbol{x})\mapsto(-t,\boldsymbol{x})$ がある．これに付随する $\mathcal{F}(M)$ 上の写像 R_{time} を

$$(R_{\mathrm{time}}(F))(t,\boldsymbol{x}):=F(-t,\boldsymbol{x})^*,\quad (t,\boldsymbol{x})\in M,F\in\mathcal{F}(M)$$

によって定義する（右辺は $F(-t,\boldsymbol{x})$ の複素共役であることに注意）．写像 R_{time} を**時間反転作用素**と言う．これは反線写像である (i.e., $R_{\mathrm{time}}(\alpha F+\beta G)=\alpha^*R_{\mathrm{time}}(F)+\beta^*R_{\mathrm{time}}(G),F,G\in\mathcal{F}(M),\alpha,\beta\in\mathbb{C}$)．さらに $R_{\mathrm{time}}^2=I$（$\mathcal{F}(M)$ 上の恒等写像）が成り立つ．次の定理は容易に証明される：

定理 3.4（時間反転対称性） $R_{\mathrm{time}}(\mathsf{S}_V)=\mathsf{S}_V$.

3.3 時間に依存しないシュレーディンガー方程式

シュレーディンガー方程式(2)の解として，$\psi(t,\boldsymbol{x})=e^{-itE/\hbar}\phi_E(\boldsymbol{x})$ ($E\in\mathbb{R}$ は定数）という形

---

*12) 例えば，文献1)の定理6.11 (p.202)や文献6)の定理3.42 (p.342)を参照.

*13) 射影表現については，文献4)の4.3.2項や文献5)の7.5節を参照.

のものを求めることを考えよう ($\int_{\mathbb{R}^3}|\phi_E(\boldsymbol{x})|^2dx<\infty$ とする). このような解は**定常解**と呼ばれる. 容易に確かめられるように, 関数 ψ が (2) の解であるための必要十分条件は, ϕ_E が**時間に依存しないシュレーディンガー方程式**

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\phi_E+V\phi_E=E\phi_E \tag{5}$$

を満たすことである. 方程式 (5) の解空間を $\mathsf{S}_V(E)$ としよう. この集合は, $\mathbb{R}^3$ 上の複素数値関数全体の空間 $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ の部分空間であることは容易にわかる. 量子力学のコンテクストでは, $\mathsf{S}_V(E)$ が空でないとき, $\mathsf{S}_V(E)$ の元 ϕ_E はエネルギーが E の固有状態を表す. この場合, E を**エネルギー固有値**と呼ぶ. $\mathsf{S}_V(E)$ の次元 $\dim\mathsf{S}_V(E)$ が 1 のとき, エネルギー E の固有状態は**非縮退**であると言う. 他方, $\dim\mathsf{S}_V(E)\geq 2$ のときは, エネルギー E の固有状態は**縮退**していると言い, $\dim\mathsf{S}_V(E)$ をその**縮退度**と呼ぶ.

各 $(\boldsymbol{a},R)\in\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ に対して, (1) において, $\mathsf{X}=\mathbb{R}^3, g=(\boldsymbol{a},R)$ とした $\rho(g)$ を $\rho(\boldsymbol{a},R)$ と記す. このとき, 2 節の結果により, 対応 $\rho:\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)\to\mathcal{F}(\mathbb{R}^3);(\boldsymbol{a},R)\mapsto\rho(\boldsymbol{a},R)$ はユークリッド的合同変換群 $\mathcal{E}(\mathbb{R}^3)$ の $\mathcal{F}(\mathbb{R}^3)$ 上での表現を与える. この表現に関して, 次の定理が成立する:

定理 3.5 V が $(\boldsymbol{a},R)$ 対称ならば, $\mathsf{S}_V(E)$ は $\rho(\boldsymbol{a},R)$ 対称である.

この定理から, いくつかの重要な帰結が得られる. 一般に, すべての回転 $R\in SO(3)$ に対して, $(\mathbf{0},R)$ 対称な関数を**回転対称な関数**と呼ぶ. このような関数は $|\boldsymbol{x}|$ だけの関数である*14). いま, V は回転対称であるとしよう. このとき, $\widetilde{\rho}(R):=\rho(\mathbf{0},R)$ によって定義される写像 $\widetilde{\rho}:SO(3)\to GL(\mathsf{S}_V(E))$ は $SO(3)$ の表現を与える. すなわち, 解空間 $\mathsf{S}_V(E)$ は回転群 $SO(3)$ の表現空間になっている. したがって, 回転群の表現論における諸事実をいまのコンテクストに応用することができる*15):

(i) 回転群 $SO(3)$ の任意の既約表現の表現空間の次元は奇数である. そこで, 最も単純な場合, すなわち, $\widetilde{\rho}$ が 1 次元既約表現の場合を考える. この場合, $\dim\mathsf{S}_V(E)=1$ であり, エネルギー E の固有状態は縮退していない. さらに, 1 次元ベクトル空間 $\mathsf{S}_V(E)$ の基底として, 回転対称な実数値関数 (したがって, $|\boldsymbol{x}|$ だけに依存する実数値関数) をとることができる. 通常, このような状態は, エネルギーの一番低い状態, すなわち, **基底状態**によって実現される.

(ii) $\dim\mathsf{S}_V(E)<\infty$ ならば, $\mathsf{S}_V(E)$ は, $\mathsf{S}_V(E)=\oplus_{k=1}^K\mathsf{W}_k$ という形に直和分解でき ($K\geq 1$ はある自然数), 各部分空間 W_k は $SO(3)$ の既約表現の表現空間 (したがって, $\dim\mathsf{W}_k$ は奇数) になっている.

このようにして, 方程式の対称性と群の表現論の諸結果を合わせることにより, 方程式を具体的に解かなくても, 方程式の解が有する基本的な性質を見出すことができる.

*14) 文献 5) の 1.7 節を参照.
*15) $SO(3)$ の表現論については, 例えば, 名著 9) を参照.

4. ディラック方程式

すでに述べたように, シュレーディンガー方程式は, 非相対論的な量子的粒子の系の状態を記述する方程式である. では, 相対論的な量子的粒子の系の場合に, その状態を記述する方程式はどのようになるであろうか. これは, 相対性理論を基礎に据える観点からは, 自然な問いである. 結論から言えば, そのような方程式の一つがディラック方程式である. この方程式を書き下すためにいくつか記号を導入する. 4 次の複素正方行列の全体を $M_4(\mathbb{C})$ で表し, $\mathbb{C}^4:=\{z=(z_1,z_2,z_3,z_4)|z_n\in\mathbb{C},n=1,2,3,4\}$ を 4 次元複素ユニタリ空間とし, $z\in\mathbb{C}^4$ のノルムを $\|z\|_{\mathbb{C}^4}$ で表す: $\|z\|_{\mathbb{C}^4}:=\sqrt{\sum_{n=1}^4|z_n|^2}$. 各 $T=(T_{nl})\in M_4(\mathbb{C})$ と $z\in\mathbb{C}^4$ に対して, $Tz\in\mathbb{C}^4$ を $(Tz)_n:=\sum_{l=1}^4T_{nl}z_l, n=1,2,3,4$ によって定義する. $\alpha_j(j=1,2,3),\beta$ を 4 次のエルミート行列で

$$\alpha_j\alpha_k+\alpha_k\alpha_j=2\delta_{jk}I_4, \tag{6}$$

$$\alpha_j\beta+\beta\alpha_j=O_4, \quad \beta^2=I_4 \tag{7}$$

$(j,k=1,2,3)$ を満たすものとする（δ_{jk} はクロネッカーのデルタ，I_4 は 4 次の単位行列，O_4 は 4 次の零行列）*16)．$\varPhi$ を $\mathbb{R}^3$ から $M_4(\mathbb{C})$ への写像で各点 $\boldsymbol{x}$ に対して $\varPhi(\boldsymbol{x})\in M_4(\mathbb{C})$ がエルミート行列となるものとする．この型の写像を**行列値ポテンシャル**と呼ぶ．$\mathfrak{m}\geq 0$ を相対論的な量子的粒子の質量としよう．**ディラック方程式**は，写像 $\varPsi: M\to\mathbb{C}^4$（$M$ 上の $\mathbb{C}^4$ 値関数）に関する次の 1 階偏微分方程式である*17)：

$$i\hbar\frac{\partial\varPsi(t,\boldsymbol{x})}{\partial t}=-ic\hbar\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\partial_j\varPsi(t,\boldsymbol{x})+\mathfrak{m}c^2\beta\varPsi(t,\boldsymbol{x})+\varPhi(\boldsymbol{x})\varPsi(t,\boldsymbol{x}) \tag{8}$$

ただし，c は真空中の光速を表すパラメータである．$\varPhi=0$ の場合の方程式 (8) を**自由なディラック方程式**と言う．

ディラック方程式 (8) の解で積分条件

$$\int_{\mathbb{R}^3}\|\varPsi_n(t,\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{C}^4}d\boldsymbol{x}<\infty \quad (t\in\mathbb{R}, n=1\sim4)$$

を満たすものの全体を $\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_{\varPhi}$ とする．

ディラック方程式 (8) の相対論的対称性を考察しよう．ベクトル空間 $\mathbb{R}^4$ の任意の 2 点 $x=(x^0,x^1,x^2,x^3), y=(y^0,y^1,y^2,y^3)$ に対して

$$\langle x,y\rangle:=x^0y^0-\sum_{j=1}^{3}x^jy^j$$

によって定義される実数 $\langle x,y\rangle$ を x と y の**ミンコフスキー計量**と呼ぶ．この計量を備えた $\mathbb{R}^4$ を **4 次元ミンコフスキーベクトル空間**と言い，これを V_{M} で表す．4 次元ミンコフスキーベクトル空間 V_{M} は相対論的力学が展開される時空を記述する*18)．V_{M} 上の線形写像 $\varLambda$ で，ミンコフスキー計量を不変にするもの，すなわち，$\langle\varLambda x,\varLambda y\rangle=\langle x,y\rangle, x,y\in V_{\mathrm{M}}$ を満たすものを V_{M} 上の**ローレンツ変換**と言う．ローレンツ変換の全体を $\mathcal{L}$ とすれば，$\mathcal{L}$ は V_{M} 上の変換群をなすことがわかる．この変換群を**ローレンツ変換群**と呼ぶ．

各 $a\in\mathbb{R}^4$ と各 $\varLambda\in\mathcal{L}$ に対して，V_M 上の写像 $(a,\varLambda)$ を

$$(a,\varLambda)(x):=\varLambda x+a, \quad x\in V_{\mathrm{M}}$$

によって定義する．この型の写像を V_M 上の**ポアンカレ変換**と言う．ポアンカレ変換の全体 $\mathcal{P}:=\{(a,\varLambda)|a\in\mathbb{R}^4,\varLambda\in\mathcal{L}\}$ は V_{M} 上の変換群になる．これを V_{M} 上の**ポアンカレ変換群**と言う．

さて

$$\gamma^0:=\beta, \quad \gamma^j:=\beta\alpha_j \quad (j=1,2,3)$$

とし，$t=x^0/c$ と変数変換すれば，$\beta^2=I_4$ を用いることにより，ディラック方程式 (8) は

$$i\hbar\sum_{\mu=0}^{3}\gamma^\mu\partial_\mu\widetilde{\varPsi}-\mathfrak{m}c\widetilde{\varPsi}-\beta\widetilde{\varPhi}\widetilde{\varPsi}=0$$

という，より美しい形に書き直せる．ただし，$\partial_0:=\partial/\partial x^0$，$\widetilde{\varPsi}(x):=\varPsi(x^0/c,\boldsymbol{x})\cdots(*)$，$\widetilde{\varPhi}(x):=\varPhi(\boldsymbol{x})/c, x=(x^0,\boldsymbol{x})\in V_{\mathrm{M}}$．式 $(*)$ によって，$\varPsi(t,\boldsymbol{x})=\widetilde{\varPsi}(x)$ $(t=x^0/c)$ である．そこで，この意味において，$\varPsi$ を V_M 上の $\mathbb{C}^4$ 値関数と見る．

新しく導入された行列 γ^μ—**ガンマ行列**と呼ばれる—は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu+\gamma^\nu\gamma^\mu=2g^{\mu\nu} \quad (\mu,\nu=0,1,2,3)$$

を満たすことがわかる．ただし，$g^{00}=1, g^{jj}=-1\,(j=1,2,3), g^{\mu\nu}=0, \mu\neq\nu$ である．

各ローレンツ変換 $\varLambda$ に対して，4 次の行列 $(\varLambda^\mu_\nu)$ を $\varLambda^\mu_\nu:=\partial(\varLambda x)^\mu/\partial x^\nu$ $(x\in V_{\mathrm{M}},\mu,\nu=0,1,2,3)$ によって定義する（これは x に依らずに定まる）．

---

*16) α_j,β は，(6), (7) を満たす 4 次のエルミート行列ならば何でもよい（ここでの考察にとって，具体的な表示は本質的ではない）．

*17) ディラック方程式の発見法的導出については，文献 7) の XI 章や文献 6) の 3.4.3 項を参照．方程式 (8) は，相対論的な古典的物質場の理論においても現れる．このコンテクストでは，$\varPsi$ は相対論的な物質場を表し，**ディラック場**（ド・ブロイ場の相対論版）と呼ばれる．方程式 (8) についても，その物理的解釈に関して，脚注 8 と同様の注意が当てはまる．ディラック場の“量子化”は**相対論的な量子場**のクラスの一つを与える（文献 2) の 11 章を参照）．

*18) より厳密には，相対論的時空は，V_{M} を基準ベクトル空間とする計量アファイン空間— **4 次元ミンコフスキー空間**—である．詳しくは，文献 5) の 4 章を参照．

ガンマ行列に関する次の事実は基本的である[*19]：

補題 4.1 各 $\Lambda \in \mathcal{L}$ に対して，4 次の正則行列 $S(\Lambda)$ が存在して

$$S(\Lambda)^{-1}\gamma^{\mu}S(\Lambda)=\sum_{\nu=0}^{3}\Lambda^{\mu}_{\nu}\gamma^{\nu} \quad (\mu=0,1,2,3)$$

が成り立つ．

V_{M} 上の $\mathbb{C}^4$ 値関数の全体を $\mathcal{F}(V_{\mathrm{M}};\mathbb{C}^4)$ とし，各 $(a,\Lambda)\in\mathcal{P}$ に対して，$\mathcal{F}(V_{\mathrm{M}};\mathbb{C}^4)$ 上の写像 $\pi(a,\Lambda)$ を

$$(\pi(a,\Lambda)F)(x) := S(\Lambda)F(\Lambda^{-1}(x-a)),$$
$$F\in\mathcal{F}(V_{\mathrm{M}};\mathbb{C}^4), \quad x\in V_{\mathrm{M}}$$

によって定義する．次の定理は，シュレーディンガー方程式の対称性に関する定理 3.2 に相当する定理であり，ディラック方程式 (8) の相対論的対称性を表す：

定理 4.2 ある $(a,\Lambda)\in\mathcal{P}$ に対して

$$S(\Lambda)\beta\widetilde{\Phi}(x)S(\Lambda)^{-1}=\beta\widetilde{\Phi}(\Lambda x+a), \quad x\in M \tag{9}$$

が成り立つとしよう．このとき，Ψ がディラック方程式 (8) の解ならば，$\pi(a,\Lambda)\Psi$ も (8) の解である．さらに，$\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_{\Phi}$ は $\pi(a,\Lambda)$ 対称である．

$\Phi=0$ の場合，条件 (9) は自明的に満たされる．したがって，自由なディラック方程式の解空間 $\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_0$ は，すべての $(a,\Lambda)\in\mathcal{P}$ に対して，(a,Λ) 対称である．これを**自由なディラック方程式のポアンカレ対称性**と言う．

時間依存型シュレーディンガー方程式の場合と同様に，ディラック方程式 (8) の解を $\Psi(t,\boldsymbol{x})=e^{-iEt/\hbar}\Psi_E(\boldsymbol{x})$ $(E\in\mathbb{R},\Psi_E:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^4)$ の形で求めることが可能である．この場合，$\Psi\in\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_{\Phi}$ であるための必要十分条件は，Ψ_E が**時間に依存しないディラック方程式**

$$-ic\hbar\sum_{j=1}^{3}\alpha_j\partial_j\Psi_E+\mathfrak{m}c^2\beta\Psi_E+\Phi\Psi_E=E\Psi_E \tag{10}$$

と条件 $\int_{\mathbb{R}^3}\|\Psi_E(\boldsymbol{x})\|^2_{\mathbb{C}^4}d\boldsymbol{x}<\infty$ を満たすことである．方程式 (10) の解の全体を $\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_{\Phi}(E)$ とする．

各 $R\in O(3)$ に対して，$\Lambda_R(x):=(x^0,R\boldsymbol{x})$, $x=(x^0,\boldsymbol{x})\in V_{\mathrm{M}}$ によって定義される写像 $\Lambda_R:V_{\mathrm{M}}\to V_{\mathrm{M}}$ はローレンツ変換である．$\mathbb{R}^3$ 上の $\mathbb{C}^4$ 値関数 F に対して $u(R)F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}^4$ を

$$(u(R)F)(\boldsymbol{x}):=S(\Lambda_R)F(R^{-1}\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

によって定義する．次の定理が成立する：

定理 4.3 ポテンシャル Φ は

$$S(\Lambda_R)\Phi(\boldsymbol{x})S(\Lambda_R)^{-1}=\Phi(R\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$$

を満たすとする．このとき，$\mathsf{S}^{\mathrm{D}}_{\Phi}(E)$ は $u(R)$ 対称である．

5. おわりに

本稿で述べた事柄はすべて，ヒルベルト空間上の線形作用素論の枠組みで定式化することが可能である．しかも，そのほうが明晰さ，統一性，一般性において格段に優れている．しかし，予備知識をあまり多く仮定しないならば，ヒルベルト空間による方法を短い頁数で叙述するのは不可能である．この理由から，本稿ではシュレーディンガー方程式とディラック方程式に対して“古典的”なアプローチをとった．ヒルベルト空間形式による扱いについては，文献 1〜6) の然るべき箇所を参照されたい．

参考文献

1) 新井朝雄：『ヒルベルト空間と量子力学』，共立出版 (1997).
2) 新井朝雄：『フォック空間と量子場 下』，日本評論社 (2000).
3) 新井朝雄：『物理現象の数学的諸原理』，共立出版 (2003).
4) 新井朝雄：『量子現象の数理』，朝倉書店 (2006).
5) 新井朝雄：『物理の中の対称性』，日本評論社 (2008).
6) 新井朝雄・江沢 洋：『量子力学の数学的構造 I, II』，朝倉書店 (1999).
7) ディラック：『量子力学』，岩波書店 (1968).
8) 朝永振一郎：『量子力学 II（第 2 版）』，みすず書房 (1997).
9) 山内恭彦・杉浦光夫：『連続群論入門』，培風館 (1960).

（あらい・あさお，北海道大学大学院理学研究院）

*19) パウリの補題（文献 2) の p.468）から従う．

ソリトン方程式の対称性

可積分系



武部　尚志

1. はじめに

「ソリトン」とは「粒子的な振舞いをする孤立波」で，ある種の非線形偏微分方程式の解として発見された．非線形で一見何の構造もない偏微分方程式に特徴のある解があり，それが厳密に，しかもきれいに求まることは驚くべき事実で，その性質を解明する過程で「非線形可積分系」と呼ばれる数学の分野が現れてきた．ソリトン方程式には“何の構造もない”どころか無限次元の対称性が隠れていることが分かってきたのである．

この記事では歴史[1)]を概観し，KP 階層の佐藤理論と変換群の理論について簡単に紹介する．

2. ソリトンの発見

2.1 孤立波の発見

水の波に「孤立波」と呼ばれる波が存在することは，1834 年にイギリスの造船技術者 Scott-Russel が運河で観察している．これは「山が孤立して動いていく」非常に安定した波であり，水槽実験で波高が高いほど速く動くことも確認された．波は振幅 u が小さければ線形波動方程式 $u_{tt}=c^2u_{xx}$（空間が 1 次元の場合）で近似的に表されるが[*1)]，これに従う波の速度は波の高さに依らずに c だから別の方程式が必要である．

例えば 1895 年には Korteweg-de Vries 方程式（略して KdV 方程式）

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1}$$

がこうした波を表す方程式として提唱された[*2)]．この方程式には確かに双曲線関数 $\cosh x=(e^x+e^{-x})/2$ を使って

$$u(x,t)=2k^2\cosh^{-2}\bigl(k(x-ct)+\delta\bigr) \tag{2}$$

と表される孤立波解がある（$c=4k^2$; 図 1 参照）．

しかし KdV 方程式 (1) を見てもさして特別な性質を持つようには見えない．実際，発見当時に孤立波解や楕円関数で表される解が見つかっただけで，以後は忘れられていく．再び表舞台に現れるのはそれから半世紀以上経ってからである．

2.2 計算機実験とソリトン

1965 年に Zabusky と Kruskal は KdV 方程式を計算機に解かせてみた（電子計算機の発明は

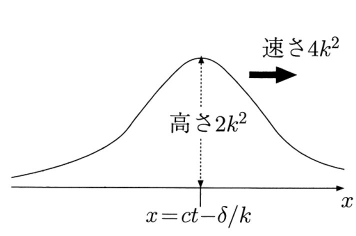


図 1　KdV 方程式の孤立波解．

*1)　時間変数を t，位置座標を x として，偏微分は $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$，$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ のように添字で表した．

*2)　1882 年の Boussinesq の論文には既に Korteweg-de Vries 方程式が書かれているということを R. Willox 氏に教わった．

20 世紀半ば)．まず初期状態として正弦波を入力して（つまり $u(x,0)=\sin x$），計算機にその先の $u(x,t)$ を計算させたのである．その結果は実に意外なもので，正弦波が崩れていくつもの波に分かれ (図 2)，それらが互いに追いかけっこをし，各々の波は別の波とぶつかっても「すり抜ける」ようにして衝突後に元の形に戻ってしまった（図 3)[*3]．

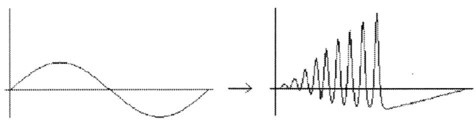


図 2　正弦波が複数のソリトンに壊れる．

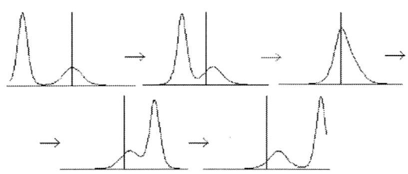


図 3　2 つのソリトンの追いかけっこ．

この波のそれぞれの山は孤立波解 (2) になっていて，それらが衝突しても形を崩さない，いわば粒子のような「硬さ」を持っていることが分かった．そこで彼らは，「孤立波 (solitary wave)」でありながら「粒子」でもある，という意味を込めて粒子を表す語尾 “-on” を使って **Solit**ary wave + **-on** = **SOLITON** という語を作った．これが「ソリトン」である[*4]．その後，KdV 方程式の他にも多くのソリトン方程式が発見された．

3. ソリトン方程式の解法

3.1 逆散乱法と Lax 形式

1967 年，Gardener, Greene , Kruskal, Miura の 4 人（GGKM と略す）は KdV 方程式の解 $u=u(x,t)$ に対して次のような補助関数 $\psi(\lambda)=\psi(x,t;\lambda)$ を考えると良いことに気がついた[*5]：微分作用素 $\frac{\partial}{\partial x}$ を ∂ と略記すると

$$\partial^2\psi(\lambda)+u\psi(\lambda)=-\lambda^2\psi(\lambda). \tag{3}$$

ここで λ は x にも t にもよらない補助的な定数で**スペクトル・パラメーター**と呼ばれる．

微分方程式 (3) は符号や係数を調節すれば量子力学の定常 Schrödinger 方程式の形をしていて，1 次元空間で u というポテンシャルの中で動く粒子の波動関数が $\psi(\lambda)$ ということである（t は時間ではなくただのパラメーターと考えている)．

GGKM は，u が KdV 方程式を満たすお蔭で波 $\psi(x,t;\lambda)$ の様子を表す「散乱データ」という量（反射係数，透過係数など）がパラメーター t に対して非常に簡単な関数になることを証明した．

逆に，散乱データからはある積分方程式を解けばポテンシャルが再現できることが知られている．したがって初期値 $u(x,0)$ から散乱データを求め，それを時間発展させてから積分方程式を解けば $u(x,t)$ が分かる，という手順で KdV 方程式が解ける．これが**逆散乱法**[2)]である．

Lax（1968 年）は，逆散乱法でスペクトル λ が時間によらず一定であることに注目した．Schrödinger 方程式 (3) は，線形作用素 $L=\partial^2+u(x,t)$ に関する固有値問題でその固有値が $-\lambda^2$ であるが，アイディアを説明するため行列の固有値問題 $P(t)v(t)=\lambda v(t)$ を考えよう．ここで $P(t)$ は t に依存する正方行列で，その固有値は t によらない，つまり $P(t)$ と $P(0)$ は全く同じ固有値を持つと仮定する．これらの行列が対角化可能とすればある正則行列 $U(t)$ によって $P(t)=U(t)P(0)U(t)^{-1}$ となるのは簡単な線形代数で分かる．これを微分することで $P(t)$ は

$$\frac{d}{dt}P(t)=[A(t),P(t)] \tag{4}$$

という微分方程式が得られる（$A(t)$ は $\frac{d}{dt}U(t)=$

*3)　今ならインターネット上で実験結果のアニメーションを見ることができる．例えば，京都大学の高崎金久氏のページ「ソリトンのさまざまな顔」`http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~takasaki/soliton-lab/gallery/solitons/`や，そこのリンク先を参照．図 2, 3 は，このページから頂いた．高崎氏に感謝する．

*4)　現在では「粒子性」の有る無しに関わらず孤立波ならば「ソリトン」と呼んでしまうこともある．

*5)　彼らの研究の様子は雑誌「数学セミナー」2008 年 8 月号と 9 月号の次の記事に生き生きと描かれている：R. Miura “ソリトンと逆散乱法：歴史的視点から”．

$A(t)U(t)$ で定義).

行列 $P(t)$ を微分作用素 $L=\partial^2+u(x,t)$ にしても事情は同じで, A をうまく選べば $u(x,t)$ が KdV 方程式を満たすことと, L が

$$\frac{\partial}{\partial t}L=[A,L], \tag{5}$$

という(作用素の)微分方程式を満たすことが同値である ($A=-4\partial^3+6u\partial+3u_x$ とすれば良い). KdV 方程式を (5) というコンパクトな形に書いたものを **Lax 形式**, L を **Lax 作用素**と呼ぶ.

3.2 広田の直接法

1970 年代初頭, 広田良吾は逆散乱法の流れとは全く独立に KdV 方程式を初めとする多くのソリトン方程式の解を求める方法を発見した. 広田の研究の動機は「ソリトンの通信への応用」だったが[3), 結果的にこれがソリトン方程式の数学的本質を見抜くための鍵になった.

例えば KdV 方程式のソリトン解 (2) は, $f(x,t)=\cosh\bigl(k(x-ct)+\delta\bigr)$ とすると

$$u(x,t)=2\frac{d^2}{dx^2}\log f(x,t) \tag{6}$$

という形になっている. 広田は N ソリトン解(ソリトンが N 個ある解)を探す過程で, 従属変数を (6) の $f(x,t)$ に相当するものに変換すれば多くのソリトン方程式が似たような格好になることに気づいた[3): KdV 方程式の場合なら関数 $f(x,t)$ についての方程式は

$$D_x(D_t+D_x^3)f\cdot f=0 \tag{7}$$

となる. ここで, D と $\cdot$ はひとまとまりで考える記号で次のように定義される**広田微分**である: $D_x^n f(x)\cdot g(x) := \partial_{x'}^n f(x+x')g(x-x')\bigr|_{x'=0}$. ($t$ についても全く同じ.) ややこしそうに見えるが, 普通の Leibniz 則 $\partial_x fg=f'g+fg'$ を $D_x f\cdot g=f'g-fg'$ のように符号つきに変更したような規則で計算できる.

広田型の表示の重要な(そして不思議な)点は, KdV 方程式を初めソリトン方程式ならどれも皆なぜか**双線形形式**(2 次の同次式)で書けてしまう, ということである. このように書き換えた方程式を**広田の双線形方程式**と呼ぶ.

4. なぜ解けるのか?

ではソリトン方程式は非線形偏微分方程式のくせになぜこのように「きれいに」解けるのか? その一つの解答が KP 階層の佐藤理論とそれに続く伊達・柏原・神保・三輪(DJKM と略す)によるソリトン方程式の変換群の理論だった.

4.1 佐藤理論

1970 年代後半, 佐藤幹夫, 三輪哲二, 神保道夫は統計物理学の Ising 模型に関する研究をしていたが, ソリトンの「広田の従属変数」, つまり (7) の f は自分たちの理論で基本的な「τ 関数」というものに他ならないことに気がついた.

そこで, 佐藤は広田方程式の高次のもの ((7) は D_x, D_t について 4 次式だが, もっと高次のもの) がどれくらいあるかを当時出回り始めたポケット・コンピューターで何百時間か計算してみる. すると「高次方程式の数」として,「整数の分割数*6)」が現れた. 三輪[4) によると,

> 何だろう, これは? おそらく大本の, 根っこをギュッとつかまえたのが (1980 年の) 秋から冬にかけてだと思うんです.
>
> それで, 数理研で研究集会があったときに話をされたんです. 佐藤先生が話をされるからというので聴きに行って, 420 号室の後ろのほうで聴いていたら, すごいことを言いだした. 要するに, 解があったときにシューア多項式で展開して, 係数がプリュッカー関係式を満たすというようなことを言われて,「アーッ!」と驚かされた.

これが佐藤理論[5) の誕生である. 以下ではこの理論の概観を現在までに整理された形で説明する.

例えば KdV 方程式の Lax 形式 (5) を一般化しようとしたりすると, Lax 作用素 L として $\partial^2+u(x,t)$ の "ルート" となるような "1 階の作用素" があると便利である. ルートになる微分作

---

*6) 整数 n を正の整数の和に表す表し方の数; $n=4$ なら $4=3+1=2+2=2+1+1=1+1+1+1$ の 5 通りに書けるから 5.

用素はないが，微分作用素を拡張した**擬微分作用素**[*7)]を使えばルートが取れる．これは，

$$L = \partial + u_2(x)\partial^{-1} + u_3(x)\partial^{-2} + \cdots \quad (8)$$

と書かれるものである．$f(x)\partial^{-n}$ の形をしたものは「微分の逆だから積分」と考えても良いが，とりあえず「ただの記号」と割り切って，積を

$$\begin{aligned}&\big(f(x)\partial^m\big)\big(g(x)\partial^n\big)\\ &= \sum_{r\geq 0}\binom{m}{r} f(x)\, g^{(r)}(x)\, \partial^{m+n-r},\\ &\binom{m}{r} := \frac{m(m-1)\cdots(m-r+1)}{r!}\end{aligned}$$

という形で決めておく．この式は m と n が非負整数ならば普通の微分作用素の積である．それを何も考えずに負の整数にも拡張しただけ．この積で (8) の形の作用素を 2 乗し $\partial^2 + u(x)$ の形になるように $u_2, u_3, \ldots$ を決めれば「ルート」になる．

Lax 作用素 (8)，つまり係数 u_i が変数 x と $t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots$（まとめて t と書く）にも依存しているとする．一般に擬微分作用素 $P = \sum_{n\in\mathbf{Z}} a_n(x)\partial^n$ の微分作用素の部分を P_+ と書く：

$$P_+ = \sum_{n\geq 0} a_n(x)\partial^n.$$

この記号を使って各 $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して Lax 型方程式

$$\frac{\partial L}{\partial t_n} = [B_n, L], \quad (B_n = (L^n)_+) \qquad (9)$$

を考え，これをまとめて考えたものを **KP hierarchy**, 日本語で **KP 階層**と呼ぶ[*8)]．

L^2 は $\partial^2 + 2u_2 +$（∂ の負巾 $\times$ 係数）の和という形だが，この「∂ の負巾の和」の部分が 0 になるべし，という条件を KP 階層に課すと $u = 2u_2$ についての KdV 方程式（$t_1 = x$, $t_3 = t$）が含まれる **KdV hierarchy**, **KdV 階層**が得られる．KP 階層はその他にもいろいろなソリトン方程式を含む非常に普遍的なものである．

逆散乱法で重要な Schrödinger 方程式 (3) に対応するのは次の線形偏微分方程式系である：

$$L\psi(x,t;\lambda) = \lambda\psi(x,t;\lambda), \qquad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t_n}\psi(x,t;\lambda) = B_n\psi(x,t;\lambda). \qquad (11)$$

ただし (10) 式では L の中の ∂^{-n}（$n = 1, 2, \ldots$）の $\psi(x,t;\lambda)$ への作用を定義する必要がある．ここでは，

$$\begin{aligned}&\psi(x,t;\lambda) = \hat{\psi}(x,t;\lambda)\, e^{x\lambda+\xi(t,\lambda)},\\ &\hat{\psi}(x,t;\lambda) = 1 + w_1(x,t)\lambda^{-1} + w_2(x,t)\lambda^{-2} + \cdots,\\ &\xi(t,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n\lambda^n,\end{aligned}$$

の形の ψ だけ考え，$\partial^n e^{x\lambda+\xi(t,\lambda)} = \lambda^n e^{x\lambda+\xi(t,\lambda)}$ と定義する（n が 0 以上なら微分しただけ）．$\partial^{-n}\psi(x,t;\lambda)$ なども擬微分作用素の積を利用して定義できるのだが詳細は省く．

佐藤・三輪・神保の発見は，この $\hat{\psi}(x,t;\lambda)$ が，ある一つの関数 $\tau(t) = \tau(t_1, t_2, \ldots)$ によって

$$\hat{\psi}(x,t;\lambda) = \left.\frac{\tau\left(t_n \text{ に } t_n - \frac{\lambda^{-n}}{n} \text{ を代入}\right)}{\tau(t)}\right|_{t_1\mapsto t_1+x} \qquad (12)$$

と表され，この **τ 関数** $\tau(t)$ こそが広田の変数 f である，ということであった．

では広田の双線形方程式は何か？ それを述べるには無限次元 Grassmann 多様体という「図形」を説明する必要があるが，まず有限次元で説明しよう．例えば 3 次元の空間の中の 2 次元部分空間 = 原点を通る平面はその上の 2 つのベクトル $\boldsymbol{v} = (a_i)_{i=1,2,3}$ と $\boldsymbol{w} = (b_i)_{i=1,2,3}$ によって決まる．方程式は $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ となり，行列式 ξ_{ij} を

---

*7) 擬微分作用素をソリトン方程式に利用することは，1970 年代の終わり頃からモスクワの Gelfand, Dikii, Manin やイギリスの Wilson, アメリカの Adler 等が始めたが，佐藤は Lax の仕事から着想を得た．

*8) $u_2 = u$, $t_1 = x$, $t_2 = y$, $t_3 = t$ と読みかえ多少係数を調整すると (9) には KP 方程式と呼ばれるソリトン方程式 $(u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$ が含まれていることが分かる．KP 階層という名前は「KP 方程式を含む偏微分方程式の階層」という意味で付けられた．

$$\xi_{ij} = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ a_j & b_j \end{vmatrix} = a_i b_j - a_j b_i \qquad (13)$$

で定義しておくと $\alpha:\beta:\gamma = \xi_{23}:-\xi_{13}:\xi_{12}$. 3 次元線形空間の 2 次元部分線形空間全体の集合を $GM(3;2)$ と書くことにすると，平面が連比 $\alpha:\beta:\gamma$ で決まることから，

$$GM(3;2)=\{[\alpha:\beta:\gamma] \mid (\alpha,\beta,\gamma)\neq(0,0,0)\}.$$

次に「4 次元空間（座標 (x,y,z,w)）の中で 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}=(a_i)_{1\leq i\leq 4}$ と $\boldsymbol{w}=(b_i)_{1\leq i\leq 4}$ で張られる 2 次元部分空間」を考えると，

$$\xi_{23}x-\xi_{13}y+\xi_{12}z=0,\quad \xi_{24}x-\xi_{14}y+\xi_{12}w=0,$$
$$\xi_{34}x-\xi_{14}z+\xi_{13}w=0,\quad \xi_{34}y-\xi_{24}z+\xi_{23}w=0 \qquad (14)$$

という方程式で表される（ξ_{ij} は (13) と同じ）．したがって，このような 2 次元部分空間は $\xi_{12}:\xi_{13}:\xi_{14}:\xi_{23}:\xi_{24}:\xi_{34}$ という連比で決まる．しかし勝手に 6 つの数の連比を与えても，(14) を満たす (x,y,z,w) が 2 次元の部分空間を作るとは限らない．実は 2 つのベクトル $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{w}$ から (13) で定義した 6 つの行列式の間には，

$$\xi_{12}\xi_{34}-\xi_{13}\xi_{24}+\xi_{14}\xi_{23}=0, \qquad (15)$$

という関係式が成り立ち，逆にこの関係式を満たす連比 $[\xi_{12}:\cdots:\xi_{34}]$ に対しては 2 次元部分空間が定まる．言い換えると $GM(4;2)$ は次のように表される：

$$GM(4;2)=\left\{\begin{array}{l}\text{全部は 0 ではなく，かつ}\\ \text{(15) を満たす } \xi_{ij} \text{ の連比}\end{array}\right\}.$$

一般に N 次元線形空間の中の m 次元部分線形空間全体の集合を **Grassmann 多様体**と呼び $GM(N;m)$ と表す．この元（つまり m 次元部分線形空間）は ${}_NC_m$ 個の数の連比で表され，この数の組を **Plücker 座標**と呼ぶ．但し，Plücker 座標は (15) のような関係式を満たすことが必要で，この関係式を **Plücker 関係式**と呼ぶ．

佐藤の定理に出てくるのは，$GM(\infty;\frac{\infty}{2})$ とで

も表されるもの[*9]で**普遍 Grassmann 多様体**，あるいは**佐藤 Grassmann 多様体**と呼ばれる．この Plücker 座標は $(\xi_\lambda)_{\lambda:\text{自然数の分割}}$ という形をしている．$GM(4,2)$ の場合は Plücker 座標 ξ_{ij} が添字 $(i,j)=(1,2),\dots,(3,4)$ を持っていたが，それに代わるものが整数の分割になる，という意味である．

一方，自然数の分割 λ に対しては **Schur 多項式**という $t=(t_1,t_2,t_3,\dots)$ を変数とする多項式 $s_\lambda(t)$ を対応させることができる．この定義[*10]は省略するが簡単なものは次のようになる．

$$s_\phi(t)=1,\quad s_1(t)=t_1,$$
$$s_2(t)=\frac{t_1^2}{2}+t_2,\quad s_{1,1}(t)=\frac{t_1^2}{2}-t_2.$$

Schur 多項式は，

- λ が n の分割ならば，$s_\lambda(t)$ は n 次の項だけからできている．但し，t_n の次数は n と数える．
- $t=(t_1,t_2,t_3,\dots)$ を変数とするどのような多項式（あるいは巾級数）も $s_\lambda(t)$ の 1 次結合として書ける．

といった性質を持つ．したがって KP 階層の τ 関数 $\tau(t)$ も

$$\tau(t)=\sum_{\lambda:\text{自然数の分割}}\xi_\lambda\, s_\lambda(t) \qquad (16)$$

のように展開できるわけだが，佐藤は，

> (16) の形の関数が KP 階層の τ 関数になることと $(\xi_\lambda)_\lambda$ が Plücker 関係式を満たし佐藤 Grassmann 多様体の点を定めることは同値！

ということを示した．つまり「KP 階層という非線形偏微分方程式系の解全体が佐藤 Grassmann 多様体という図形で表される」のである．

Schur 関数の性質を使うと ξ_λ を $\tau(t)$ の微分で書き表すことができ，Plücker 関係式は $\tau(t)$ の微分の 2 次同次方程式（双線形方程式）になる．これが広田の双線形方程式の正体である．

4.2 ソリトン方程式の対称性

佐藤の発見した上の対応により Grassmann 多様体の持つ性質を KP 階層の性質として読みかえることができる．Grassmann 多様体の対称性に注目したのが DJKM の「ソリトン方程式の変換群の理論」[6] である．

Grassmann 多様体 $GM(N;m)$ を考えたときの N 次元線形空間の各ベクトルに N 次正則行列をかければ，m 次元部分空間は m 次元部分空間に写り $GM(N;m)$ から $GM(N;m)$ への写像を定める．このように N 次正則行列全体のなす**群**[*11]$GL(N)$ は $GM(N;m)$ に作用して，その**対称性**を表す．円や球が回転対称 = 回転全体のなす群を対称性として持つ，と言うのと同じ意味である．

佐藤 Grassmann 多様体の場合は同様に "∞ 次正則行列" の群を対称性とする，と言いたいところだが無限に大きい行列を素朴に扱うと無限和が出てきて発散してしまうことがあり，発散をうまく抑え込む代わりに群を 1 次元分膨らませた「中心拡大」というものを考えなくてはいけなくなる[*12]．DJKM の理論は，この "中心拡大した ∞ 次正則行列の群" $GL(\infty)$ の佐藤 Grassmann 多様体への作用を KP 階層の言葉に書きかえたものである：

- **KP 階層の対称性の群は** $GL(\infty)$ **である．**
- $GL(\infty)$ の特別な元の作用は**頂点作用素**[*13]という無限階の微分作用素によって表され，N ソリトン解を $N+1$ ソリトン解に写す．例えば，$\tau(t)=1$ という自明な τ 関数（= "0 ソリトン

---

*9） 座標 $(\dots,x_{-2},x_{-1},x_0,x_1,x_2,\dots)$ を持つような線形空間の部分線形空間で，$x_0=x_1=x_2=\dots=0$ となるような部分空間と同じ "大きさ" を持つもの全体．

*10） 例えば『ソリトンの数理』[6] §9.3 参照．

*11） 積が定義されていて，結合法則を満たし単位元があり各元に逆元がある集合．

*12） 実際は群そのものではなく，その「無限小作用」（群の作用を微分したもの）を定義して Lie 代数というものの作用を考えるのが普通．ここで出てくる無限次元 Lie 代数とその仲間たちはアフィン Lie 代数と呼ばれ 1960 年代末から純粋に数学的興味から研究されていたが，その非常に面白い応用例となったのである．

*13） 元々は，素粒子の弦理論等で使われていたものの類似．

解")から出発して頂点作用素を次々と作用させれば任意のソリトン解を構成できる.

- 佐藤・三輪・神保が研究した Ising 模型の理論の中のテクニック（自由フェルミオンなど；数学の言葉では Clifford 代数）を使って τ 関数や $GL(\infty)$ の作用を具体的に構成できる.

KdV 階層の場合は L^2 が微分作用素になるべし，という条件を保つ $GL(\infty)$ の元だけが方程式の対称性である．これは自然に $A_1^{(1)}$ 型という無限次元の群になる．とにかくソリトン方程式の対称性は"でかい"のである.

肝心の対称性については具体的なことを何も書かなかったが，必要な用語などを学部学生の方にも分かるように説明するには相当の紙数が必要である．詳細は以下の参考文献を参照してほしい.

参考文献

1) 別冊・数理科学「ソリトン」，サイエンス社 (1985).

2) 田中俊一，伊達悦朗：『KdV 方程式』，紀伊國屋数学叢書 **16** (1979).

3) 青本・柏原・佐藤・神保・伊達・広田・三輪：討論 自然の秩序は非線型にある―ソリトン，数学セミナー増刊，シンポジウム数学 **4**,「数学研究の最前線」(齋藤正彦，廣瀬 健，森 毅編) 19–56 日本評論社，(1982).

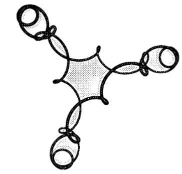
4) 三輪哲二，野海正俊，高崎金久，上野健爾：数理物理と佐藤幹夫先生，数学のたのしみ **13**, **14**, 日本評論社 (1999); 木村達雄編，『佐藤幹夫の数学』，日本評論社 (2007) 所収.

5) 佐藤幹夫，野海正俊：ソリトン方程式と普遍グラスマン多様体，上智大学数学講究録 **18** (1984); 佐藤幹夫講義録，梅田亨記，数理解析レクチャー・ノート **5**, 京都大学数理解析研究所 (1989); 高崎金久：『可積分系の世界―戸田格子とその仲間―』，共立出版 (2001).

6) Date, E., Kashiwara, M., Jimbo, M. and Miwa, T., Transformation groups for soliton equations, in Nonlinear integrable systems—classical theory and quantum theory (Kyoto, 1981), World Sci. Publishing, Singapore, 39–119, (1983); 三輪哲二，神保道夫，伊達悦朗：『ソリトンの数理』，岩波講座 応用数学 [対象 **4**] (1993); 新版（単行本）(2007).

（たけべ・たかし，
お茶の水女子大学大学院人間文化創成科学研究科）

パンルヴェ方程式と対称性



坂井　秀隆

非線型微分方程式に関しては，重ね合わせの原理が成り立たないから，特殊な解を１つ，あるいはいくつか作れたとしても，それらから別の解を構成することは必ずしも可能ではない．

２階の非線型常微分方程式であるパンルヴェ方程式には，ベックルント変換と呼ばれる変換があって，１つ解が与えられると，それをベックルント変換で動かしていくことによって，次々と新しい解を構成していくことができる．

パンルヴェ方程式に関して「対称性」と称されるのは，このような新しい解を構成するメカニズムのことだと理解できる[1)]．

1. パンルヴェ方程式

対称性について語る前に，パンルヴェ方程式自体について簡単な紹介をしておこう．

元々パンルヴェがこのような方程式を持ってきた動機というのは，**新しい特殊函数の理論を作る**ことだった．これは，18，19 世紀に楕円函数の理論が数学にもたらしたものを考えれば，うなずける発想だ．

函数を定義する方法はいろいろある．まずよくあるのが，級数で定義する方法である．冪級数で定義する以外にも，ゼータ函数のような例もある．級数でないものだと，積分表示で定義する例があるし，微分方程式や差分方程式などの函数方程式の解であることを定義にすることもある．ガンマ函数は，簡単な差分方程式と漸近的挙動で定義できることが知られている．

パンルヴェはこうした中で，微分方程式の解として定義されるものからいい候補をとってこようと考えた．ところが，微分方程式の解なら何でもいいというわけにはいかない．いい性質を持つものだけをとってきたいのだが，ここでヒントになるのはやはり，すでに成功している例を見ることだろう．特殊函数と言えば，まず楕円函数，それから，線型微分方程式の解として定義されるガウスの超幾何函数やベッセル函数がある．

複素領域の線型微分方程式の理論を思い出してみると，まず特異点の位置がわかって，それをまわって解析接続したときの振舞いを考えたりする．モノドロミーである．

こういう理論が作れるのは特異点の位置が決定できるからで，線型方程式の解は方程式の係数の特異点以外では正則であるという定理のおかげである．これは非線型方程式の場合には当てはまらない．楕円函数のみたす微分方程式を見てみよう．

$$\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3.$$

この微分方程式の一般解は $y=\wp(t-c)$（c は積分定数）となる．ここで $\wp$ はワイヤシュトラスのペー函数だが，これは $t=c$ に極をもち，c は任意であったから，この特異点の位置は微分方程式からだけでは決定されないのだ．このような，特異

点の位置が方程式から決定されておらず，位置が初期値に依存しているような特異点を，動く特異点と呼ぶ．それでも，極の周りでは函数は 1 価で，これは分岐点であるよりは扱いやすいと言える．

パンルヴェはこの 2 つを含んだ拡張として，次の性質をみたす微分方程式を調べることにした．

パンルヴェ性：すべての解について，動く特異点は極に限る．

このような発想からパンルヴェが導いた定理は以下のようなものである．

定理 1（パンルヴェ–ガンビエ） 正規型 2 階代数的微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

がパンルヴェ性をもつならば，次のいずれかに帰着できる：

1. 求積可能；
2. 線型方程式の解で解ける；
3. 楕円函数を使って解ける；
4. $P_{\rm I} \sim P_{\rm VI}$ と書かれる 6 つの方程式のどれか．

方程式の具体的な形を与えるべきだろうが，ここでは第 1 と第 2 方程式の 2 つのみをあげておく．

$$P_{\rm I}: \frac{d^2y}{dt^2} = 6y^2 + t,$$
$$P_{\rm II}: \frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + ty + \alpha - \frac{1}{2}.$$

パンルヴェの方程式たちに共通な特徴として，(非自励) ハミルトン系の形に書かれることと，楕円函数の非自励化と考えられることの 2 つを注意しておこう．

2 つの例に関してはハミルトニアンは

$$H_{\rm I} = \frac{1}{2}p^2 - 2q^3 - tq,$$
$$H_{\rm II} = \frac{1}{2}p(p - 2q^2 - t) - \alpha q.$$

また，t を定数であると思うと，$H_{\rm J} = E$ は楕円曲線になっている．

2. アフィン・ワイル群対称性

パンルヴェ第 1 方程式にはベックルント変換がない．第 2 方程式についてベックルント変換を見てみよう．パンルヴェの第 2 方程式

$$\frac{dy}{dt} = z - y^2 - \frac{t}{2}, \quad \frac{dz}{dt} = 2yz + \alpha$$

には次のような変換が知られている．

$$(Y, Z) = s_1(y, z) = \left(y + \frac{\alpha}{z}, z\right),$$
$$(Y, Z) = \pi(y, z) = (-y, t - z - 2y^2).$$

変換による像，(Y, Z) は α をそれぞれ，$-\alpha, 1-\alpha$ に置き換えた方程式をみたしていることがわかる．

これらの変換を使うと，例えば，パラメーターの値が $\alpha = 1/2$ での有理函数解 $(y, z) = (0, t/2)$ から，各半整数点 $\alpha = 1/2 - n$, $(n \in \mathbf{Z})$ での有理函数解が構成される．

$$\alpha = -3/2: \ (y, z) = \left(\frac{2(t^3 - 2)}{t(t^3 + 4)}, \frac{t^3 + 4}{2t^2}\right),$$
$$\alpha = -1/2: \ (y, z) = (1/t, t/2),$$
$$\alpha = 1/2: \ (y, z) = (0, t/2),$$
$$\alpha = 3/2: \ (y, z) = \left(-\frac{1}{t}, \frac{t^3 + 4}{2t^2}\right),$$
$$\vdots$$

パンルヴェの第 2 方程式の有理函数解は，このようにして得られるもので尽くされることが知られている．

これらの対称性を，アフィン・ワイル群の言葉を使って整理したのは，岡本和夫である[2)]．

第 2 方程式の場合，パラメーターの空間に変換 s_1 と π はそれぞれ $\alpha = 0, 1/2$ に関する折り返しを与えている．これらは変換群を生成して，それは $A_1^{(1)}$ 型のアフィン・ワイル群と同型になる (その他の方程式の変換のなす群との整合性を考えると，そのディンキン図形の自己同型のなす群による拡大 $\widetilde{W}(A_1^{(1)})$ と思ったほうがいい)．アフィン・ワイル群は無限次元のリー代数論などで重要な役割を担う無限群である．

6 つのパンルヴェ方程式に関して，対称性は以

下のようになっている：

P_{VI}	P_{V}
$\widetilde{W}(D_4^{(1)})$	$\widetilde{W}(A_3^{(1)})$

$P_{\mathrm{III}}(D_6)$	$P_{\mathrm{III}}(D_7)$	$P_{\mathrm{III}}(D_8)$
$\widetilde{W}\left((A_1+A_1)^{(1)}\right)$	$\widetilde{W}(A_1^{(1)})$	S_2

P_{IV}	P_{II}	P_{I}
$\widetilde{W}(A_2^{(1)})$	$\widetilde{W}(A_1^{(1)})$	1

3. 曲面論による説明（1）岡本初期値空間

パンルヴェの方程式がこのような対称性を持つことは，実際に有理変換の式を代入して計算すれば確認できる．しかし，このような変換はこれで全部であるかとか，どうしてこのような群が作用しているのかといった疑問は残るだろう．

これらの疑問に，代数幾何の言葉を使って答えることができる．まず，パンルヴェの各方程式に有理曲面を対応させる話をしよう．

具体例で見るためにパンルヴェの第 1 方程式

$$\frac{dy}{dt}=z, \quad \frac{dz}{dt}=6y^2+t$$

を例にとる．

この方程式の初期値と言うと，$\mathbf{C}^2$ と考えるのが普通だが，パンルヴェ性において極を許していたということを思い出そう．極，つまり ∞ となるような値も初期値として考えなくてはいけない．これを幾何学的に見ると $\mathbf{C}^2$ のコンパクト化ということになる．$\mathbf{C}^2$ にはいろいろなコンパクト化があるのだが，難しく考えないで，射影平面 $\mathbf{P}^2$ をとってみよう．

射影平面の斉次座標を $(x_0:x_1:x_2)$ とすると，$\mathbf{P}^2$ は，$(x_1/x_0, x_2/x_0)\in\mathbf{C}^2$, $(x_2/x_1, x_0/x_1)\in\mathbf{C}^2$, $(x_0/x_2, x_1/x_2)\in\mathbf{C}^2$ という 3 枚の $\mathbf{C}^2$ の張り合わせで構成できる．座標 $(x_1/x_0, x_2/x_0)$ を (y,z) と思って，第 1 方程式を $\mathbf{P}^2$ 上の方程式と思うと，$(\lambda,\mu)=(x_0/x_2, x_1/x_2)$ は方程式

$$\frac{d\lambda}{dt}=-6\mu^2-t\lambda^2,$$
$$\frac{d\mu}{dt}=-6\frac{\mu^3}{\lambda}+1-t\lambda\mu$$

をみたす．この方程式は，$\lambda=0$ となる点で定義されていない．

もう少しちゃんと見るために，独立変数 t も含めた 3 次元空間でのパッフ系として書いてみよう．

$$\theta_1=d\lambda+(6\mu^2+t\lambda^2)dt=0,$$
$$\theta_2=\lambda d\mu+(6\mu^3-\lambda+t\lambda^2\mu)dt=0.$$

この方程式の $\lambda=0$ 上での解は，$dt=0$，つまり $t=$ 定数 となる．これはパッフ系の解だが，独立変数 t によって径数付けできないので特別なものと思い，$\lambda=0$ のようなものをヴァーティカル・リーフと呼ぶ．

パッフ系の特異点は，$\theta_1\wedge\theta_2=0$ となるような点で，今の場合は $(\lambda,\mu)=(0,0)$ という点がそうだ．第 1 方程式を $\mathbf{P}^2$ 上で見ると，$x_0=0$ にヴァーティカル・リーフを持ち，$(x_0:x_1:x_2)=(0:0:1)$ が特異点となり，他は正則であることがわかる．

特異点 $(\lambda,\mu)=(0,0)$ をさらによく見てみると，任意の時間 $t=t_0$ において，これを初期値とするような解が存在することがわかる．しかも，1 つではなくて，たくさんの解がここに集まっていることがわかるのだ．このような，正則解の存在する特異点を，**到達可能特異点**と呼ぶ．冪級数の形を仮定して代入することで，詳しく見てみよう．

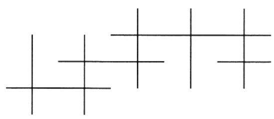
$$\lambda=-\frac{1}{2}T^3+\frac{t_0}{20}T^7+\frac{3}{40}T^8-hT^9+\cdots.$$

ここで，$T=t-t_0$ とした．h は任意定数で，$h\in\mathbf{C}$ の分だけ解がある．これは，初期値として位置と運動量 $(\lambda,\mu)\in\mathbf{C}^2$ に現れているはずのパラメーターが，より高次の微分係数に隠れてしまっていると考えることができる．

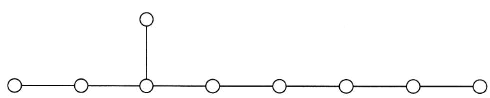
この到達可能特異点は 9 回のブロウ・アップで解消でき，方程式は，$\mathbf{P}^2$ を 9 回ブロウ・アップした空間では，9 本の $\mathbf{P}^1$ に同型なヴァーティカル・リーフを持ち，到達可能特異点をもたないことがわかる．ヴァーティカル・リーフは互いに交わっていて，その交点はパッフ系の特異点になっているが，これは到達可能ではなく，ここを通る解は存在しない．この $\mathbf{P}^2$ の 9 回ブロウ・アップで作られた空間からヴァーティカル・リーフを抜

いた空間は，初期値として，方程式の解とちょうど一対一に対応しているのだ．この空間をパンルヴェ第 1 方程式の**初期値空間**と呼ぼう．この空間も，岡本和夫により構成された[3)]．

面白いのは，このヴァーティカル・リーフの配置だ．この交わり方は絵で描くと次のようになっている．



この直線，つまり $\mathbf{P}^1$ を $\circ$ で表し，交わるものどうしを線で結ぶことにすると次のような図が描ける．



これは無限次元リー代数の分類で現れる $E_8^{(1)}$ 型のディンキン図形である．このような図形は他のパンルヴェ方程式にも現れて，次のようになる．

$P_{\rm VI}$	$P_{\rm V}$	$P_{\rm III}$	$P_{\rm IV}$	$P_{\rm II}$	$P_{\rm I}$
$D_4^{(1)}$	$D_5^{(1)}$	$D_l^{(1)}{}_{(l=6,7,8)}$	$E_6^{(1)}$	$E_7^{(1)}$	$E_8^{(1)}$

第 3 方程式に 3 つの図形が出てくるが，これはパラメーターの値によって違う型の曲面が出てくるからである．私はこの方程式をパラメーターによってさらに 3 種類に分けて，パンルヴェ方程式は全部で 8 種類と思ったほうがよいと考えている．

このような図形は楕円曲面の理論にも現れるが，パンルヴェ方程式の初期値空間は楕円曲面にならない．パンルヴェ超越函数は，楕円函数から“少しだけ”ずれたものなのである．

4. 曲面論による説明（2）ピカール群の中の 2 つのルート R, $R^\perp$

ヴァーティカル・リーフの表と対称性の表を見比べると面白いことがわかる．ここで現れる最も大きい $E_8^{(1)}$ のルート格子を考え，その中でヴァーティカル・リーフの配置から得られるルート（R と書く）に直交している格子をとると，対称性の表に現れるルート（$R^\perp$ と書く）に対応するルート格子 $Q(R^\perp)$ が現れるのだ．例えば $P_{\rm II}$ の場合，$E_8^{(1)}$ のルート格子の中で，$R=E_7^{(1)}$ に直交している部分格子を考えると $R^\perp=A_1^{(1)}$ のルート格子となる．ここで，R 型のルートに対応したルート格子を $Q(R)$ と書いた．

これを曲面論から説明しよう．初期値空間（正確には，それにヴァーティカル・リーフを加えたコンパクトな空間 X）は射影平面への双有理射をもち，射影平面の 9 点ブロウ・アップとして実現できる．よって，ピカール群は

$$\mathrm{Pic}(X)=\mathbf{Z}\mathcal{E}_0+\mathbf{Z}\mathcal{E}_1+\cdots+\mathbf{Z}\mathcal{E}_9$$

と書ける．ただし，$\mathcal{E}_0$ は射影平面上の直線の引き戻しのなす線型同値類，$\mathcal{E}_i$ $(i\neq 0)$ は例外曲線で，交叉型式は

$$\mathcal{E}_0\cdot\mathcal{E}_0=1,\quad \mathcal{E}_i\cdot\mathcal{E}_i=-1\quad (i\neq 0),$$
$$\mathcal{E}_j\cdot\mathcal{E}_k=0\quad (j\neq k).$$

で定義される．ここで，$E_8^{(1)}$ 型のルート格子は，標準類 $\mathcal{K}_X=-3\mathcal{E}_0+\mathcal{E}_1+\cdots+\mathcal{E}_9$ に直交している部分群として現れる．

曲面上定義された微分方程式がある．これをブロウ・ダウンして，射影平面に落としてやると，元の標準的な座標がとれて，それを使って微分方程式を書き下してやることになる．

曲面を与えたとき，無数にある例外曲線の中のどれをブロウ・ダウンして射影平面への射を作るかは決まらないので，ピカール群の基底の取り換えが重要だ．二通りブロウ・ダウン構造があったとき，1 つ目の射影空間をブロウ・アップして初期値空間を作り，別の方法でブロウ・ダウンして射影空間に戻す双有理写像を考えると，これがパンルヴェ方程式の双有理変換になっている．ではこれらはどれだけあるのだろうか．

ここで，$\mathrm{Pic}(X)$ の自己同型のうち

1. 交叉形式をかえない，

2. 標準類を動かさない，

3. 有効類のなす $\mathrm{Pic}(X)$ の部分半群を不変にする

ものを**クレモナ等長変換**と言い，それらのなす群を $\mathrm{Cr}(X)$ と書く．

クレモナ等長変換は，ヴァーティカル・リーフから生成される部分群 $Q(R)$ を不変にすることがわかる．よって，それはヴァーティカル・リーフに直交する部分群 $Q(R^{\perp})$ に作用している．$Q(R^{\perp})$ の内積を保つ自己同型群の情報から $\mathrm{Cr}(X)$ が決定され，これがパンルヴェ方程式の対称性を与えるのである．

5. 線型微分方程式の変形理論

ここで少し話を変えよう．パンルヴェの方程式には，パンルヴェの代数的常微分方程式の分類理論とは別に，もう一つの出自がある．それは，線型方程式の変形理論から導出するというもので，R. フックスによって与えられた．

特異点がすべて確定特異点であるような線型方程式をフックス型微分方程式と言う．この方程式の解の大域的な性質は，モノドロミーの言葉を使って記述できるわけだが，リーマンは逆に，与えられたモノドロミー群をもつフックス型微分方程式が存在するか，という問題を考えた．この問題は，1900 年のヒルベルトの「数学の諸問題」にも，21 番目の問題として取り上げられ，フックス型方程式とモノドロミー表現との間の対応を，今では**リーマン–ヒルベルト対応**と呼んだりする．

ところで，この対応は一般には，一対一ではない．そこで，同じモノドロミーを与えるようなフックス型方程式の族を考えるというのは，自然な発想だろう．R. フックスは，2 階のフックス型で確定特異点が 4 つの場合，この族をパンルヴェの第 6 方程式によって記述することに成功した．

ここでは少しだけ，フックスの結果のあらましを見てみよう．まず，フックス型方程式を行列型で

$$\frac{d}{dx}Y(x,t) = A(x,t)Y(x,t)$$

と書いておく．ここで，$A(x,t)$ は x についての有理函数で書ける行列で，t は等モノドロミー変形の変形パラメーターとして導入したものだ．今の場合は，特異点の位置を $(0,1,t,\infty)$ とおいて 4 点の配置を表すパラメーターとしてとる．

ここで，t を動かしつつモノドロミーを動かさない変形を考えたいのだが，この条件は，実は，次のような変形方程式の存在に帰着される：

$$\frac{\partial}{\partial t}Y(x,t) = B(x,t)Y(x,t).$$

ただし，$B(x,t)$ はやはり x について有理函数だ．

もとの方程式と変形方程式との両立条件

$$\frac{\partial}{\partial t}A(x,t) - \frac{\partial}{\partial x}B(x,t) = [B(x,t), A(x,t)].$$

を考えると，$B(x,t)$ は $A(x,t)$ によって決まり，さらに $A(x,t)$ の成分に関する条件も得られる．この条件を $A(x,t)$ を適当にパラメトライズすることで書き下してやると，パンルヴェの第 6 方程式が現れるのだ．

このフックスの計算は様々に拡張されている．まずパンルヴェの残りの方程式は，6 型の場合の特異点を合流させて得られる，不確定特異点を含むような方程式の変形問題から得られることがわかっている．さらに 2 階フックス型の一般的な変形理論はガルニエによって与えられ，ガルニエ系と呼ばれる多変数の非線型偏微分方程式系が現れる．1981 年の神保–三輪–上野の論文では，不確定特異点を許す $m \times m$-行列系という一般的設定でのモノドロミー保存変形が扱われている[6]．

6. 線型方程式と対称性

そうすると，パンルヴェ方程式の対称性として現れる変換群と，この線型方程式との関係が気になってくる．パンルヴェ方程式の未知函数は，線型方程式の空間をパラメトライズする座標と見なせるので，これらの変換を線型方程式の自然な変換として意味づけられないかということだ．

以前から以下の変換との関係はよくわかっていた：

1. 独立変数の変換による特異点の取り替え．

2. 各特異点でのゲージ変換（特異点 $x=c$ に対し，解に $(x-c)^\theta$ をかける変換）．

3. シュレージンガー変換と呼ばれる，特性指数を整数だけずらす変換．

しかし，これらの変換ですべてのパンルヴェ方程式のベックルント変換が説明されるわけではなく，例えば，岡本変換と呼ばれる第 6 方程式の変換はこれらで構成することができなかった．最近になって岡本変換がミドル・コンヴォリューションと呼ばれる変換で説明できることが示された[7]．この変換は積分変換で構成でき，一般には線型方程式のサイズを変えてしまう．

7. 終わりに

パンルヴェ方程式については近年かなり研究が進んで，いろいろなことがわかるようになった気がする．ソリトン理論，表現論との関係からいろいろな拡張も行われている．この記事では，一部の結果しか述べることができなかった．特に対称性に関しては参考文献の野海正俊氏の優れた本があるので，そこであまり扱われていないことを中心に述べた．

参考文献

1) 野海正俊，『パンルヴェ方程式』，朝倉書店．
2) K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations I. *Annali di Matematica pura ed applicata* **CXLVI** (1987), 337–381; II. *Jap. J. Math.* **13** (1987), 47–76; III. *Math. Ann.* **275** (1986), 221–255; IV. *Funkcial. Ekvac. Ser. Int.* **30** (1987), 305–332.
3) K. Okamoto, Sur les feuilletages associés aux équation du second ordre à points crtiques fixes de P. Painlevé, *Japan. J. Math.* **5** (1979), 1–79.
4) 岡本和夫，『パンルヴェ方程式序説』，上智大学数学講究録．
5) H. Sakai, Rational Surfaces Associated with Affine Root Systems and Geometry of the Painlevé Equations, *Comm. Math. Phys.* **220** (2001), 165–229.
6) M. Jimbo, T. Miwa and K. Ueno, Monodromy preserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. I, *Physica* **2D** (1981), 306–352.
7) G. Filipuk, On the middle convolution and birational symmetries of the sixth Painlevé equation, *Kumamoto J. Math* **19** (2006), 15–23.

（さかい・ひでたか，東京大学大学院数理科学研究科）

名著に親しむ

——特集から広がる読書案内——

大山 陽介

求積法の復活へ向けて

微分方程式に関して究極の問題は当然ながら「微分方程式を解く」ということである．実際には，ほとんどの微分方程式は解くことができないので，直接解くことから逃げて定性的な性質を調べたりするか，解の定義を変えることになる．特に後者の発想はいかにも20世紀的であり，「微分方程式の解とは何か」という問いに対して納得のいく解の定義を答えられない現在，方程式の事情に合わせて解の定義を都合のよいものに変えつつ，解の意味を探ればよいのである．大きな転換期は三体問題の壁に当たったポアンカレが力学系の基を作ったときであり，以後いわゆる求積法は急速に時代遅れの存在に落ちてしまったかのように思える．

ポアンカレ以前の天体力学や剛体の運動などの古典力学には対称性をもった方程式が数多く知られていた．萩原雄祐『天体力学の基礎』には様々な古典方程式が紹介されている．コワレフスカヤのこまや三体問題も解説されている．決して現代的ではなく読みやすくもないが，今でも読んで楽しい文献である．この本を手に取れば，古典的な求積法を諦めざるを得なくなった19世紀末へと容易にタイムスリップできよう．

しかし，21世紀になった今，周回遅れの求積法が気がつくと時代の前を走っているのではないか？ と少なくとも私は考えたいのである．具体的に微分方程式の解が求まる場合，常微分・偏微分を問わず何らかの幾何学的な対称性が存在することが普通であった．対称性が第一積分の存在を導き，方程式の変数を減らすことができるのである．19世紀的な求積法が行き詰った後，「対称性」に新しい風をもたらしたのはソリトン方程式であった．現象や方程式自体は19世紀に発見されたが，その後は長く忘れ去られたKdV方程式がクラスカルらの研究によって蘇ったのである．以後のソリトン方程式の研究において，広田良吾，佐藤幹夫の2人の日本人が大きな役割を果たした．ソリトンのτ函数の理論などを解説したのが，伊達・三輪・神保『ソリトンの数理』（岩波書店）である．

ソリトン方程式は偏微分方程式だが，特殊化して常微分方程式に落とすとその解は動く分岐点を持たない（パンルヴェ・テスト）ことが知られている．逆に，すべてのパンルヴェ方程式はソリトン方程式から導き出されることもあり，パンルヴェ方程式そのものも対称性を持つ．ソリトン方程式に作用する群が無限次元アフィン・リー環であるのに対し，パンルヴェ方程式に作用するのは離散的なアフィン・ワイル群である．パンルヴェ方程式のこうした代数的側面を取り上げて極めて魅力的に解説したのが野海正俊『パンルヴェ方程式』（朝倉書店）である．この本によって，微分方程式の専門家以外の人にもパンルヴェ方程式が親しみやすくなった．

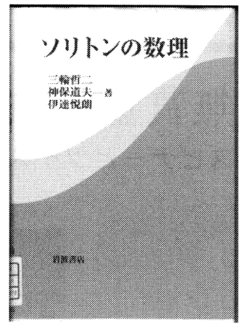
微分方程式の解空間の対称性を探るという意味では，微分ガロア理論も「対称性」の現れであろう．線型方程式の微分ガロア理論は，Picard–Vessiot 理論として基本的な部分は完成されている．非線型方程式に対しても梅村浩の理論がある．ただし無限次元の部分は易しくはない．こうした方向へといざなう学部生にも読める入門書として，名著・久賀道郎『ガロアの夢』（日本評論社）がある．フックス型方程式とそのモノドロミの解説としても，大変魅力のある本である．ただし，筆者も微分ガロア理論の入門として書いたわけではなく，理論のほんの入り口に過ぎない．微分ガロア理論の現代的な入門書としては，簡明ながらも本格的な Magid『Lectures on Differential Galois Theory』（AMS, 1994）を挙げるにとどめる．

また，微分ガロア理論のもう一つの形として，非線型微分方程式を外微分形式の形で記述するマルグランジュ流の Galois groupoid の理論がある．E. カルタン以来の伝統がある外微分形式について求積法の現代化を意識しつつ書かれたのが，松田道彦『外微分形式の理論』（岩波書店）である．古典求積法を抱合した現代的理論がその先にあるかもしれない．

ソリトン，パンルヴェ，微分ガロアとも20世紀に発展した分野である．ここで計算機の力も援用しつつもうひとふんばりすれば，再び求積法に輝きが戻るような気がするのであるが，それは私だけであろうか？ 初めに戻るが，微分方程式は最後には「解く」ことが究極の問題であると思うのである．

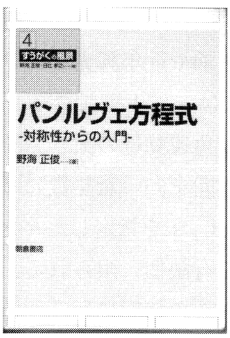
（おおやま・ようすけ，大阪大学大学院情報科学研究科）

ソリトンの数理



三輪哲二，神保道夫，伊達悦朗，112 頁，岩波書店，2007 年
（元は岩波講座 応用数学の一冊，1993 年）

ソリトンに関する佐藤理論を知ろうとすると，未だに佐藤幹夫の数理研講義録か野海正俊の記述による上智大講究録によることになる．この本は，佐藤オリジナルの形ではないが，京都スクールの手によるソリトン理論の唯一といっていい書物．しかし，本当にソリトンが面白くなるのはこの本の後にくる話であり，準周期解，アフィン・リー環の表現，離散系，逆散乱問題などへとつながる世界が開かれている．

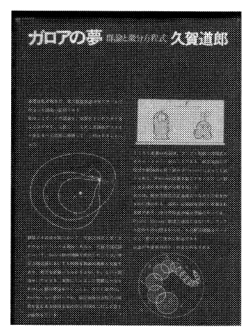


パンルヴェ方程式 対称性からの入門

野海正俊，204 頁，朝倉書店，2000 年

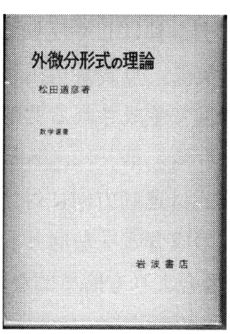
動く特異点を持たない方程式の分類から生まれたパンルヴェ方程式は，イジング模型に応用されて以来，ここ 30 年に研究が大きく進んだ．モノドロミ保存変形などの解析的な手法だけでなく，初期値空間の代数幾何，アフィン・ワイル群の表現論など様々な道具が研究に用いられる．本書は，アフィン・ワイル群の表現との関係に絞って解説した切れ味の良い本である．

ガロアの夢 群論と微分方程式



久賀道郎，195 頁，日本評論社，1968 年

東大の 1 年生向けのゼミナールの講義が元になっており，学部生向きの話であるが，現在から見るとレベルがかなり高い．ガロアの遺書にかかれていた「曖昧の理論（théorie de l’ambiguité）」はおそらくリーマン面の被覆空間のことであろうと推察されるが，その先にはおそらくリーに先駆けて微分方程式の変換群論があっただろうことは想像に難くない．



外微分形式の理論

松田道彦，208 頁，岩波書店，1976 年

「微分方程式とは何か？」を問い詰めて現代化しようという試みは，大きく分けて微分代数を用いる代数的手法と，外微分形式を用いる幾何的手法に分かれる．この分裂は，ピカールや E. カルタンの時代から，現在の梅村浩とマルグランジュに至るまで延々と連なるものである．本書は題名の通り幾何的手法によるものであり，目標は偏微分方程式の求積法の現代化である．

無質量自由場の方程式と対称性

スピナーとツイスター

高﨑　金久

1. はじめに

量子力学では粒子と波動は一体をなすものであり，粒子を記述する際にも時空上に広がった場（波動函数）を用いる．さらに相対性理論（以下ではミンコフスキー時空における特殊相対性理論のみを考える）では，場を記述する方程式は時空上の並進やローレンツ変換に関して不変（正確に言えば共変）でなければならない．これは場の方程式に対してかなりの制約となる．特に，外場や粒子間の相互作用を考えない自由場の方程式では，これと方程式の階数に関する物理的要請によって，方程式の形がほとんど決まってしまう．

4 次元時空の場合には，ここで 2 次元特殊ユニタリ群 $SU(2)$ や 2 次元特殊線形群 $SL(2,\mathbf{C})$ の初歩的な表現論が役に立つ．$SU(2)$ と $SL(2,\mathbf{C})$ はそれぞれ 3 次元回転群 $SO(3)$ と本義ローレンツ群 $O^+_\uparrow(1,3)$（ローレンツ群 $O(1,3)$ の単位元を含む連結成分）の 2 重被覆であり，量子力学的粒子の**スピン**[1,2] と呼ばれる性質と関わっている．例えば，原子内部や磁場中の電子の状態を調べれば，電子は空間内を移動する自由度以外に「自転」というべき内部自由度（内部運動の自由度）をもつことがわかる．この内部自由度がスピンである．実際には「自転」というのは古典力学的な譬え話に過ぎない．スピンは純粋に量子力学的な性質であり，角運動量の大きさに相当する量は $\hbar = h/2\pi$（h はプランク定数）を単位として半整数値 $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \cdots$ に量子化される．前述の電子や近年脚光を浴びているニュートリノの場合には $s = 1/2$ である．さらに，古典力学的自転では角運動量の大きさを指定しても自転軸が異なる方向を向いた無数に多くの状態が存在するのに対して，s を指定したときのスピンの状態はある意味で有限個に限られる．スピンをもつ粒子の場はこれらの状態に対応する有限個の成分をもち，$SU(2)$ や $SL(2,\mathbf{C})$ がこの多成分場に線形変換として作用する．言い換えれば，スピンをもつ粒子の場はこれらのリー群の表現空間に値をもつ．このような場を**スピナー場**と言う．表現空間の要素自体は**スピナー**[*1] と呼ばれる．

以下では特に無質量（粒子の質量がゼロ）の場合に焦点を絞る．これは様々な意味で特別な場合である．第一に，無質量粒子は光速で運動する（そもそも光の粒子である光子は無質量である）．その軌跡は相対論的時空の幾何学において特別な意味をもつ．第二に，無質量粒子の場の方程式は並進やローレンツ変換に加えて引き延ばしや反転でも不変であると期待される．実際，無質量自由場の方程式はこれら 4 種類の変換で生成される共形変換群 $CO(1,3)$ の対称性をもつ．第三に，スピンをもつ無質量自由場の方程式は運動方向に対するスピンの向きが「右回り」の成分と「左回り」の成分に分解して，有質量の場合よりも簡単になる．

*1） 日本語では「スピノル」というのが普通であるが，ここでは「ツイスター」に合わせて英語風に「スピナー」ということにする．

この方程式を紹介するのがこの記事の主な目的である．

これらの特徴を備えた無質量自由場の方程式は場の方程式としては極めて単純なものであるが，ツイスター理論[3,4]の初期の研究において重要な題材となった．ツイスター理論では時空とは別に**ツイスター空間**と呼ばれる複素多様体（その点が**ツイスター**である）を用意して，その間を多対多の対応で結ぶ．4 次元ミンコフスキー時空に対するツイスター空間は 3 次元複素射影空間 $\mathbf{CP}^3$ となる．スピナー形式で書かれた無質量自由場の方程式の解はこのツイスター空間の適当な領域で定義された正則函数（あるいはそれが定めるある種のコホモロジー類）を用いて積分表示することができる．ツイスター理論との関係についてはこの記事の最後に触れることにする．

2. 4 次元時空とベクター，テンサー

4 次元ミンコフスキー時空 $\mathbf{M}$ は $\mathbf{R}^4$ に

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2-(dx^1)^2-(dx^2)^2-(dx^3)^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \end{aligned} \tag{1}$$

という $+---$ 型のローレンツ計量（正確に言えば擬計量）を入れたものである．**アインシュタインの規約**に従って，上下に対をなす添え字については総和するものとする．すなわち，総和記号を明示すれば

$$ds^2=\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$$

となる．以後も同様にして総和記号を省略する．計量を上のように表すとき，x^0 は時間，x^1,x^2,x^3 は空間の座標と解釈されるが（光速を 1 とする座標を考えている），相対性理論ではもちろんこれは絶対的なものではなく，ローレンツ変換

$$x^\mu\to x'^\mu=L^\mu{}_\nu x^\nu \tag{2}$$

によって時間と空間は混ざり合う．ここで $L=(L^\mu{}_\nu)$ はローレンツ群 $O(1,3)$ の要素，すなわち

$$\eta_{\mu\nu}L^\mu{}_\alpha L^\nu{}_\beta=\eta_{\alpha\beta}$$

という等式を満たす実数の 4×4 行列である．

相対性理論では $A^{\mu\nu\cdots}$ という形のテンサー*2) を**反変テンサー**，$B_{\mu\nu\cdots}$ という形のテンサーを**共変テンサー**と呼ぶ．特に v^μ, w_μ はそれぞれ**反変・共変ベクター**と呼ばれる．多様体論の言葉ではこれらはそれぞれ

$$A^{\mu\nu\cdots}\partial_\mu\otimes\partial_\nu\otimes\cdots\in T\mathbf{M}\otimes T\mathbf{M}\otimes\cdots$$

（$\partial_\mu=\partial/\partial x^\mu$）ならびに

$$B_{\mu\nu\cdots}dx^\mu\otimes dx^\nu\otimes\cdots\in T^*\mathbf{M}\otimes T^*\mathbf{M}\otimes\cdots$$

というものを表している．

上下両方の添え字をもつ**混合型テンサー** $C^{\mu\nu\cdots}{}_{\alpha\beta\cdots}$ も同様に解釈できる．

計量を用いれば異なる型のテンサーの間に自然な対応ができるが，相対性理論ではこの対応を**添え字の上げ下げ**と呼ばれる操作で実現している．$\eta_{\mu\nu}$ を要素とする 4×4 行列の逆行列の行列要素を $\eta^{\mu\nu}$ と表せば（数値的には $\eta_{\mu\nu}$ と同じものである），添え字の上げ下げは

$$A_\alpha{}^{\nu\cdots}=\eta_{\alpha\beta}A^{\beta\nu\cdots},\quad B^\alpha{}_{\nu\cdots}=\eta^{\alpha\beta}B_{\beta\nu\cdots}$$

などのようになる．

このようなテンサー記法を用いれば，電磁気を記述するマクスウェル方程式は相対論的に共変（かつ簡潔）な形

$$\partial^\mu F_{\mu\nu}=j_\nu,\quad \partial^\mu\tilde{F}_{\mu\nu}=0 \tag{3}$$

に書き直せる．ここで $F_{\mu\nu}$ は電場 $\boldsymbol{E}=(E^1,E^2,E^3)$ と磁場 $\boldsymbol{B}=(B^1,B^2,B^3)$ を

$$\begin{aligned} &F_{01}=E^1,\quad F_{02}=E^2,\quad F_{03}=E^3,\\ &F_{12}=-B^3,\quad F_{23}=-B^1,\quad F_{31}=-B^2 \end{aligned}$$

というように組み込んだ反対称テンサー（$F_{\nu\mu}=-F_{\mu\nu}$ が成立する），$\tilde{F}_{\mu\nu}$ はそのホッジ双対（電場

*2) 「スピノル」を「スピナー」と言うことにしたので，「テンソル」もそれに合わせて「テンサー」になる．同様の意味で「ベクトル」は「ベクター」となる．

と磁場を $\boldsymbol{E} \to -\boldsymbol{B}, \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{E}$ と置き換える)，j^μ は電荷密度と電流密度を一つのベクターにまとめたものである．ここまではいわば「量子力学登場以前」の相対性理論の話である．

3. 4次元時空のスピン構造

スピンに関わる諸々の構造（**スピン構造**）を導入するには時空座標を

$$x = \begin{pmatrix} u & \bar{z} \\ z & v \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_\mu x^\mu \qquad (4)$$

という 2×2 行列に組む．ここで σ_μ は

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

という行列を表す*3)（$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ はいわゆる**パウリ行列**である)．u, v, z をもとの時空座標で表せば

$$u = \frac{x^0 + x^3}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x^0 - x^3}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{x^1 + x^2 i}{\sqrt{2}}$$

となる．特に x はエルミート行列であり，逆に任意の 2×2 エルミート行列はこのようにして4次元時空の点を定める，ということに注意されたい．

最後の注意から，$SL(2, \mathbf{C})$ の任意の要素 h は

$$x \to x' = hxh^* \qquad (5)$$

(h^* は h のエルミート共役を表す）によって (2) の形の線形座標変換を引き起こすことがわかる．さらに，ローレンツ計量が

$$ds^2 = 2dudv - 2dzd\bar{z} = 2\det(dx) \qquad (6)$$

と表せることから

$$\begin{aligned} 2\det(dx') &= 2\det(h)\det(dx)\det(h^*) \\ &= 2\det(dx) \end{aligned}$$

という等式が得られて，この線形座標変換がローレンツ変換であることがわかる．

詳しい説明は省くが，このローレンツ変換を定める行列 L は実際には本義ローレンツ群 $O^+_\uparrow(1,3)$ に属し，$h \in SL(2, \mathbf{C})$ に $L \in O^+_\uparrow(1,3)$ を対応させる写像

$$\tau : SL(2, \mathbf{C}) \to O^+_\uparrow(1,3), \quad \tau(h) = L$$

は2重被覆となる．$L \in O^+_\uparrow(1,3)$ の逆像は h と $-h$ からなるが，これらは $O^+_\uparrow(1,3)$ の中の閉路に沿うモノドロミーで入れ替わり得る．すなわち，L を連続的に変形して L に戻るとき，対応する h は h に戻るとは限らず，$-h$ に変わることも起こるのである*4)．さらに，この2重被覆は部分群 $SU(2) \subset SL(2, \mathbf{C})$, $SO(3) \subset O^+_\uparrow(1,3)$ の間の2重被覆

$$\tau : SU(2) \to SO(3)$$

を引き起こす．こうしてスピンの理論を司るリー群が勢揃いする．

スピナーとはこの $SL(2, \mathbf{C})$ によって線形変換（高階スピナーの場合には多重線形変換）される量である．これに対してテンサーは $O(1,3)$ によって（多重）線形変換される量と見なすことができる．共変テンサーと反変テンサーは $O(1,3)$ の要素 $L = (L^\mu{}_\nu)$ が

1. そのまま作用する（反変テンサーの場合)，
2. 反傾（逆行列の転置）で作用する（共変テンサー）

という点に違いがある．スピナーの場合には，$SL(2, \mathbf{C})$ の要素 $h = (h^a{}_b)$ （添え字の値域は $a, b = 0, 1$ とする）が複素共役 $\bar{h} = (\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}})$ （添え字には $\dot{a}, \dot{b} = \dot{0}, \dot{1}$ というように点を付けたものを用いる*5)）で作用することも可能なので，

*3) 実は素粒子論ではこれらを $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \sigma^3$ と表すので，素粒子論の流儀で行列 x を定義するときには (4) において余分の符号因子が必要になる．

*4) この事実はスピンの理論の初期から物理学者に知られていて，粒子のスピンと統計的性質との関係など，その後の重要な発展の端緒になった[1]．

*5) ここでは素粒子論の流儀を採用している．ツイスター理論では伝統的に点の代わりにプライム $'$ を用いる．また，スピナーの添え字には大文字を用いる．したがって，この後出てくる $\phi^a, \psi_a, \xi^{\dot{a}}, \eta_{\dot{a}}$ はツイスター理論の伝統的記法では $\phi^A, \psi_A, \xi^{A'}, \eta_{A'}$ と書かれることになる．

1. そのまま作用する，
2. 反傾で作用する，
3. 複素共役で作用する，
4. 複素共役の反傾で作用する，

の 4 通りの場合がある．1, 2 の場合はテンサーにならって下付き・上付きの添え字を用いて ϕ^a, ψ_a のように表す．また，3, 4 の場合には有点添え字を用いて同様に $\xi^{\dot a}, \eta_{\dot a}$ のように表す．それらの変換則は

$$\phi'^a = h^a{}_b \phi^b, \quad \psi'_a = H_a{}^b \psi_b,$$
$$\xi'^{\dot a} = \bar{h}^{\dot a}{}_{\dot b} \xi^{\dot b}, \quad \eta'_{\dot a} = \bar{H}_{\dot a}{}^{\dot b} \eta_{\dot b}$$

となる．ここで $H_a{}^b, \bar{H}_{\dot a}{}^{\dot b}$ はそれぞれ ${}^t h^{-1}$ と ${}^t \bar{h}^{-1}$（h^{*-1} に等しい）の行列要素を表す．高階・混合型スピナーの場合も同様である．この意味で，$SL(2, \mathbf{C})$ が (5) のように作用する時空座標行列 x は混合型スピナー $x^{a\dot a}$ を成分とするもの

$$x = (x^{a\dot a}) = \begin{pmatrix} x^{0\dot 0} & x^{0\dot 1} \\ x^{1\dot 0} & x^{1\dot 1} \end{pmatrix}$$

と考えることができる．

スピナーに対しても添え字の上げ下げの規則が導入できる．ただし，上げ下げに用いられる係数はテンサーの場合の計量成分 $\eta_{\mu\nu}, \eta^{\mu\nu}$（$\mu, \nu$ について対称）と違って，

$$(\epsilon_{ab}) = (\epsilon^{ab}) = (\epsilon_{\dot a\dot b}) = (\epsilon^{\dot a\dot b}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

という反対称な量である．さらに

$$\phi^a = \epsilon^{ab}\phi_b, \quad \psi_b = \psi^a \epsilon_{ab}$$

（有点添え字の場合も同様）というように，上げるときと下げるときでは様子が異なる*6)．ϵ_{ab} は反対称なので，第 2 式を第 1 式のように書き直せば

$$\psi_a = -\epsilon_{ab}\psi^b$$

というように負符号が現れる，ということに注意されたい．ちなみに，この ϵ 記号を用いれば，ローレンツ計量は

$$ds^2 = \epsilon_{ab}\epsilon_{\dot a\dot b} dx^{a\dot a} dx^{b\dot b} \tag{7}$$

と表せる．これは技巧的な感じのする行列式表示 (6) よりも自然な表示と言えるだろう．

無質量自由場の場合に限らず，ツイスター理論では様々な場面でこのようなスピナー記法が用いられる．この記法はツイスター理論を学ぶ際の障害になりがちだが，慣れればなかなか楽しい．

4. スピナー形式の無質量自由場の方程式

スピナー場の方程式として最初に見出されたのはスピン 1/2 の粒子（典型的には電子）の場に対する**ディラック方程式**である．電磁場や他の粒子との相互作用がない（すなわち自由粒子の）場合には，ディラック方程式は

$$(\gamma^\mu \partial_\mu + im)\Psi = 0 \tag{8}$$

となる．ここで m は粒子の質量，γ^μ は

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu} I$$

という代数的関係式（I は単位行列を表す）を満たす 4×4 の定数行列，Ψ は 4 成分の場である．

γ^μ としては上の代数的関係式（$\eta^{\mu\nu}$ に関するクリフォード代数の基本関係式に他ならない）を満たすものを任意に選んでよいのだが，カイラル表示と呼ばれる選び方

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix},$$
$$\gamma^k = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^k \\ -\sigma^k & 0 \end{pmatrix} \quad (k = 1, 2, 3)$$

（ここでは I は 2×2 の単位行列を表す）の下では，Ψ を 2 種類のスピナー場 $\phi^a, \psi_{\dot a}$ の成分を縦に並べたもの

$$\Psi = \begin{pmatrix} \phi^a & (a = 0, 1 \downarrow) \\ \psi_{\dot a} & (\dot a = \dot 0, \dot 1 \downarrow) \end{pmatrix}$$

と考えることができる．この表示の下で (8) は

*6) このあたりも素粒子論とツイスター理論で流儀が異なる．

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\partial_{a\dot{a}}\phi^a + im\psi_{\dot{a}} = 0,\\ \sqrt{2}\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}} + im\phi^a = 0\end{aligned} \tag{9}$$

（$\partial_{a\dot{a}} = \partial/\partial x^{a\dot{a}}$）という連立方程式に書き直せる．これによって $SL(2,\mathbf{C})$ の作用（時空座標 $x^{a\dot{a}}$ とスピナー場 $\phi^a, \psi_{\dot{a}}$ を同時に変換する）に対する共変性が明瞭になる．カイラル表示は進行方向に対するスピンの向き（ヘリシティ）に注目する表示であり，ϕ^a が「左回り」（負ヘリシティ），$\psi_{\dot{a}}$ が「右回り」（正ヘリシティ）の成分と解釈される．

特に，無質量（典型的にはニュートリノ）の場合には，(9) は $\phi^a, \psi_{\dot{a}}$ のそれぞれに対する方程式

$$\partial_{a\dot{a}}\phi^a = 0, \quad \partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}} = 0 \tag{10}$$

に分離する．これらの方程式は**ワイル方程式**と呼ばれる．2 つの方程式を区別するときには ϕ^a に対する方程式を「負ヘリシティのワイル方程式」，$\psi^{\dot{a}}$ に対する方程式を「正ヘリシティのワイル方程式」と言う．ワイル方程式は $SL(2,\mathbf{C})$ 変換に加えて引き延ばし

$$x \to x' = cx, \quad (c \in \mathbf{R},\, c \neq 0)$$

や一般化された反転

$$x \to x' = -hx^{-1}h^*, \quad (h \in GL(2,\mathbf{C}))$$

などの共形変換に関しても共変である．

ワイル方程式をスピン s の場合に一般化すれば

$$\partial_{a\dot{a}}\phi^{aa_2\cdots a_m} = 0 \tag{11}$$

ならびに

$$\partial^{a\dot{a}}\psi_{\dot{a}\dot{a}_2\cdots\dot{a}_m} = 0 \tag{12}$$

となる．ここで $m = 2s$ であり，$\phi^{a_1\cdots a_m}, \psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m}$ は添え字について完全対称なスピナー場である．完全対称な $2s$ 階スピナーは $SL(2,\mathbf{C})$ の $2s+1$ 次元既約表現の表現空間を実現するものと見なせるが，冒頭に述べたようにそのような表現はスピン s の粒子の状態を表すので，(11) と (12) はスピン s の粒子の場の方程式と解釈できるのである．初期のツイスター理論において研究の対象となったのはこれらの**一般化ワイル方程式**である．

(11), (12) が意味のある一般化であることを確かめるには，各種の自由場の方程式をこの形に書き直してみればよい．例えば，真空中（$j^\mu = 0$）のマクスウェル方程式は以下のようにして $s = 1$ の一般化ワイル方程式に書き直せる（これは光子がスピン 1 の粒子であるという事実の一つの定式化である）．

1. 電磁場を表すテンサー $F_{\mu\nu}$ をスピナーに書き直す．これにはローレンツ計量をスピナー形式で表す式 (7) がヒントになる．この式は計量テンサー $\eta_{\mu\nu}$ が $\epsilon_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}$ というスピナーに対応することを意味する．これにならって

$$F = F_{\mu\nu}dx^\mu \wedge dx^\nu = F_{a\dot{a}b\dot{b}}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}$$

という等式によってスピナー $F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ を定める．

2. $F_{\mu\nu}$ の反対称性を考慮に入れた簡単な考察から，$F_{a\dot{a}b\dot{b}}$ が

$$F_{a\dot{a}b\dot{b}} = \phi_{ab}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}} + \epsilon_{ab}\psi_{\dot{a}\dot{b}} \tag{13}$$

という形に表せることがわかる．ここで ϕ_{ab} と $\psi_{\dot{a}\dot{b}}$ は対称なスピナー（$\phi_{ba} = \phi_{ab}, \psi_{\dot{b}\dot{a}} = \psi_{\dot{a}\dot{b}}$）であり，具体的には

$$\phi_{ab} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot{a}\dot{b}}F_{a\dot{a}b\dot{b}}, \quad \psi_{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon^{ab}F_{a\dot{a}b\dot{b}}$$

で与えられる．表現論的に言えば，(13) は $SL(2,\mathbf{C})$ のある表現を既約表現（対称スピナーで与えられる）に分解することに相当する．

3. (13) を微分形式の言葉に翻訳すれば

$$F = \phi_{ab}S^{ab} + \psi_{\dot{a}\dot{b}}S^{\dot{a}\dot{b}} \tag{14}$$

となる．ここで $S^{ab}, S^{\dot{a}\dot{b}}$ は

$$\begin{aligned}S^{ab} = \frac{1}{2}\epsilon_{\dot{a}\dot{b}}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}},\\ S^{\dot{a}\dot{b}} = \frac{1}{2}\epsilon_{ab}dx^{a\dot{a}} \wedge dx^{b\dot{b}}\end{aligned}$$

と定義される微分形式で，ホッジ作用素 $*$ に関してそれぞれ反自己双対あるいは自己双対，すなわち

$$*S^{ab} = -iS^{ab}, \quad *S^{\dot{a}\dot{b}} = iS^{\dot{a}\dot{b}}$$

が成立する．その意味で (14) は F を反自己双対部分 F_- と自己双対部分 F_+ に分解することを表している．

4. F を用いれば真空中のマクスウェル方程式は

$$dF = 0, \quad d{*F} = 0$$

と表せる．これは

$$dF_- = 0, \quad dF_+ = 0$$

と同値であるが，これを $\phi_{ab}, \psi_{\dot{a}\dot{b}}$ の方程式に翻訳すれば $s = 1$ の場合の一般化ワイル方程式 (11), (12) になる．

5. ツイスター理論からの見方

紙数が残り少ないので，最後にツイスター理論との関係についてごく手短かに説明する．詳しくは拙著[3)]などを参照されたい．

4 次元ミンコフスキー時空のツイスター理論では，4 次元複素線形空間 $\mathbf{T} = \mathbf{C}^4$（その要素がツイスターであると考えてもよい）から出発して，$\mathbf{T}$ の 2 次元複素線形部分空間全体からなるグラスマン多様体 $Gr(2,\mathbf{T})$ を複素化された時空（ミンコフスキー時空 $\mathbf{M}$ がその中に含まれる），1 次元複素線形部分空間全体からなる射影空間 $\mathbf{PT}$（$\mathbf{CP}^3$ に他ならない）をツイスター空間と考える．これらは次の図式の定める対応（**プリュッカー・クライン対応**）で結ばれる：

$$\begin{array}{ccc} & Fl(1,2,\mathbf{T}) & \\ {}^{p_2}\swarrow & & \searrow^{p_1} \\ Gr(2,\mathbf{T}) & & \mathbf{PT} \end{array} \qquad (15)$$

ここで $Fl(1,2,\mathbf{T})$ は $X_1 \subset X_2 \subset \mathbf{T}$ というように入れ子になった 1 次元部分空間 X_1 と 2 次元部分空間 X_2 の組 (X_1, X_2) 全体からなる旗多様体である．p_1, p_2 はそれぞれ $(X_1, X_2) \in Fl(1,2,\mathbf{T})$ に対して $X_1 \in \mathbf{PT}$, $X_2 \in Gr(2,\mathbf{T})$ を対応させる写像である．$Gr(2,\mathbf{T})$ の点 X に対応する $\mathbf{PT}$ の部分集合 $p_1(p_2^{-1}(X))$ を Γ_X と表すことにする．Γ_X は X に対応する**ツイスター直線**と呼ばれ，1 次元複素射影直線 $\mathbf{CP}^1$（すなわちリーマン球面）に同型である．後で説明する無質量自由場の積分表示はこのリーマン球面上の積分路に沿った周回積分と解釈できる．

座標を導入してこの幾何学的設定を具体化しよう．まず，$\mathbf{T}$ の要素（再度強調するが，これがツイスターである）は 4 成分量であるが，これをディラック場 Ψ のように 2 種類のスピナー $\mu^a, \lambda_{\dot{a}}$[*7)] を縦に並べたもの

$$\xi = \begin{pmatrix} \mu^a \ (a = 0, 1 \downarrow) \\ \lambda_{\dot{a}} \ (\dot{a} = \dot{0}, \dot{1} \downarrow) \end{pmatrix}$$

と見なす．$\xi \neq 0$ のとき，$GL(1,\mathbf{C})$ 作用 $\xi \to c\xi$ $(c \neq 0)$ に関する同値類 $[\xi]$ は $\mathbf{PT}$ の点を表す．次に，$Gr(2,\mathbf{T})$ の点 X とは $\mathbf{T}$ の 2 次元線形部分空間のことであるから，その基底 ξ^0, ξ^1 を選んで横に並べて得られる階数 2 の 4×2 行列

$$\Xi = \begin{pmatrix} \xi^0 & \xi^1 \end{pmatrix}$$

によって X を指定することもできる．$GL(2,\mathbf{C})$ の要素 h を右から乗じたもの Ξh は Ξ と同じ点に対応するので，正確には $GL(2,\mathbf{C})$ の右作用 $\Xi \to \Xi h$ に関する同値類 $[\Xi]$ が $Gr(2,\mathbf{T})$ の点を表す．ミンコフスキー時空 $\mathbf{M}$ あるいはその複素化 $\mathbf{CM} = \mathbf{C}^4$ の各点 $x = (x^{a\dot{a}})$（$\mathbf{CM}$ の場合には $x^{a\dot{a}}$ は任意の複素数値を取る）に

$$\Xi = \begin{pmatrix} ix \\ I \end{pmatrix} \qquad (16)$$

という行列の定める $Gr(2,\mathbf{T})$ の点 $[\Xi]$ を対応させれば，時空のグラスマン多様体への埋め込み

$$\mathbf{M} \hookrightarrow \mathbf{CM} \hookrightarrow Gr(2,\mathbf{T})$$

が得られる．$\mathbf{CM} \hookrightarrow Gr(2,\mathbf{T})$ は開埋め込みであり，$Gr(2,\mathbf{T})$ は複素化時空 $\mathbf{CM}$ のコンパクト

*7) ツイスター理論の伝統的記法ではこれらを $\omega^A, \pi_{A'}$ という記号で表す．

化と見なせる．最後に，時空座標 $x^{a\dot{a}}$ とツイスター座標 $\mu^a, \lambda_{\dot{a}}$ を用いれば，$[\Xi] \in Gr(2, \mathbf{T})$ と $[\xi] \in \mathbf{PT}$ が p_2, p_1 を通じて対応すること（部分空間の言葉で言えば，$[\Xi]$ に対応する $X_2 \subset \mathbf{T}$ と $[\xi]$ に対応する $X_1 \subset \mathbf{T}$ が包含関係 $X_1 \subset X_2$ にあること）は

$$\mu^a = ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}} \qquad (17)$$

という等式で表されることがわかる．この等式は時空座標とツイスター座標を関係づける基本的なものだが，実はツイスター理論の誕生以前に相対性理論の研究の中で姿を見せていた．ツイスター理論はそれを幾何学的に解釈する試みから生まれたのである．

以上のような座標を用いると，一般化ワイル方程式の解を周回積分の形で具体的に書き下すことができる．(12) の場合には解の積分表示は

$$\psi_{\dot{a}_1\cdots\dot{a}_m}(x) = \oint_{C_x} f(ix^{a\dot{a}}\lambda_{\dot{a}}, \lambda_{\dot{a}})\lambda_{\dot{a}_1}\cdots\lambda_{\dot{a}_m}\omega \qquad (18)$$

となる．ここで $f(\xi)$ はツイスター座標 $\xi = (\mu^a, \lambda_{\dot{a}})$ の $-m-2$ 次斉次正則函数であり，そこに (17) を代入して $\lambda = (\lambda_{\dot{a}})$ の斉次正則函数にしたものが被積分函数に現れている．ω は

$$\omega = \frac{\lambda_{\dot{0}}d\lambda_{\dot{1}} - \lambda_{\dot{1}}d\lambda_{\dot{0}}}{2\pi i}$$

という微分形式を表す．λ は x に対するツイスター直線 $\Gamma_x \simeq \mathbf{CP}^1$ の斉次座標と見なすことができる．C_x はこの Γ_x をリーマン球面と見なしてその上に適当に選んだ閉路であり，上の積分は非斉次座標 $\zeta = \lambda_{\dot{1}}/\lambda_{\dot{0}}$ に関する周回積分と解釈される．(11) の解の積分表示についてはここでは説明を省く．

プリュッカー・クライン対応 (15) は共形変換を含む時空の対称性に対しても明快な説明を与える．$\mathbf{T}$ には一般線形群 $GL(4, \mathbf{C})$ が左から作用するが，これは (15) の各多様体への同変な作用を引き起こす．この作用を (16) の行列で表現すれば，

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(4, \mathbf{C})$$

$(a, b, c, d$ は 2×2 ブロックを表す）の作用は

$$ix \to ix' = (aix + b)(cix + d)^{-1}$$

という行列型 1 次分数変換で与えられることがわかる．さらに，(15) におけるミンコフスキー時空 $\mathbf{M}$ とツイスター空間 $\mathbf{PT}$ の対応を調べれば，$GL(4, \mathbf{C})$ の中で $\mathbf{T}$ 上のエルミート形式

$$\Phi(\xi) = \xi^* \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xi$$

$(++--$ 型符号をもつ）を不変に保つ要素からなる部分群 $U(2,2)$ が $\mathbf{M}$ 上の共形変換群 $CO(1,3)$ に対応することが示せる．その中で並進・ローレンツ変換・引き延ばし・反転を表す g も容易に同定できる．例えば，一般化された反転 $x' = -hx^{-1}h^*$ を与える g は

$$g = \begin{pmatrix} 0 & h \\ h^{*-1} & 0 \end{pmatrix}$$

となる．

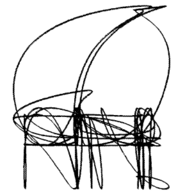
参考文献

1) 朝永振一郎,『スピンはめぐる』, 中央公論社, 1974 年.
2) 特集「スピンはさらにめぐる」, 数理科学 2001 年 7 月号.
3) 高崎金久,『ツイスターの世界』, 共立出版, 2005 年.
4) 特集「ツイスター理論の拡がり」, 数理科学 2006 年 10 月号.

（たかさき・かねひさ，京都大学大学院人間・環境学研究科）

ヤン・ミルズ方程式と対称性

素粒子物理



橋本　義武

1. はじめに

自然界に働く力として，古くから**重力**と**電磁気**が知られていたわけだが，この2つでは原子核の結合と崩壊を説明することができなかった．オッカムの剃刀*1) を己への戒めとするヨーロッパの知性は新たな力の導入による打開を躊躇したが，湯川秀樹の中間子論によって扉が開かれ，結局，原子核の結合に関わる**強い相互作用**と，原子核の崩壊に関わる**弱い相互作用**が基本的な力として新たに加えられた．

これらの新しい力を電磁気と同じ枠組みで理解しようというのが**ゲージ理論**であり，その基本方程式が**ヤン・ミルズ方程式**

$$[\nabla_\mu, *\mathcal{F}_{\nu\rho}] + [\nabla_\nu, *\mathcal{F}_{\rho\mu}] + [\nabla_\rho, *\mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0$$

である．記号については後で説明する．これは電磁気学におけるマクスウェル方程式の中の，電場に対するガウスの法則とアンペール・マクスウェルの法則に相当している．残りの2つ，磁場に対するガウスの法則とファラデーの法則は，恒等式として成立するように理論を作る．

ヤン・ミルズ方程式は，ベクトル場を未知関数とする偏微分方程式であり，**ゲージ対称性**と**ローレンツ対称性**をもつ．ゲージ対称性は，以下で説明するように，量子力学における波動関数の偏角の不定性に由来するものであり，ローレンツ対称性は相対論からの要請である．

ここでは，ゲージ理論やヤン・ミルズ方程式がどのようなものなのか感じをつかむために，そもそも電磁気とは何だったかを考え直してみることにする．結論から言うと，**「電磁気は，微分積分だけではとらえられないトポロジー的現象である」**ということになる．

2. ゲージ対称性から電磁場へ

2.1 解析力学とゲージ変換

ニュートン力学では，ポテンシャル $V(\boldsymbol{x}, t)$ （t は時刻，$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ は位置）の中の質量 m の粒子は，運動方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\dot{x}^j) = -\frac{\partial V}{\partial x^j}, \quad \frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t} = \dot{x}^j$$

$(j = 1, 2, 3)$ に従う．ここで，V に t のみの関数を足して $V \to V + a(t)$ としても運動方程式は変わらない．この不変性は，ゲージ対称性の萌芽である．

$$T(\dot{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\boldsymbol{x}}^2, \quad L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t) = T - V$$

$(\dot{\boldsymbol{x}}^2 = \dot{\boldsymbol{x}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})$ とおくと，運動方程式は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} - \frac{\partial L}{\partial x^j} = 0 \tag{1}$$

と書ける．この式は，一般の $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}, t)$ に対し，作用

*1) 「必要以上に多くの実体を仮定すべきではない.」14 世紀の神学者・哲学者オッカムのウィリアムの言葉.

$$S[\boldsymbol{x}(t)] = \int_{t_0}^{t_1} L\left(\boldsymbol{x},\, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t},\, t\right) \mathrm{d}t$$

に関する変分問題の停留点を与えるオイラー・ラグランジュ方程式になっている．関数 $L(\boldsymbol{x},\, \dot{\boldsymbol{x}},\, t)$ を**ラグランジアン**と言う．

このとき，関数 $f(\boldsymbol{x},\, t)$ に対し，ラグランジアンに

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f}{\partial x^j}\dot{x}^j + \frac{\partial f}{\partial t}$$

を足しても運動方程式 (1) は変わらないことがわかる．この変換を**ゲージ変換**と呼ぶことにする．

$L = T - V(\boldsymbol{x},\, t)$ にゲージ変換を施すと，ラグランジアンに $\dot{\boldsymbol{x}}$ について 1 次の項が新たにできるので，もとの形が保たれない．そこで，最初から

$$L = T - (\dot{\boldsymbol{x}} \text{ の 1 次式})$$

という形のラグランジアンを考えよう．この形だったらゲージ変換で閉じている．

電磁場の中の荷電粒子のラグランジアンはこの形をしている．すなわち

$$L = T - q(\phi - \boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{x}}) \tag{2}$$

q は電荷，$\phi(\boldsymbol{x},\, t)$ はスカラー・ポテンシャル，$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\, t) = (A_1,\, A_2,\, A_3)$ はベクトル・ポテンシャルである．ゲージ変換は，$f = q\Lambda$ とおくと，

$$\phi \longrightarrow \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}, \quad A_j \longrightarrow A_j + \frac{\partial \Lambda}{\partial x_j} \tag{3}$$

と書ける．

このとき運動方程式 (1) は

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_j}\right) = q\left(E_j + \sum_{k=1}^{3} B_{jk}\dot{x}_k\right)$$

となる．ここで，

$$E_j = -\frac{\partial \phi}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial t}, \quad B_{jk} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$$

はそれぞれ電場，磁束密度である．

このように，粒子のラグランジアンの不定性について閉じた形の理論を考えると，電磁場が自然に現れる．

2.2 荷電粒子のハミルトニアン

電磁場の中の荷電粒子 (2) に対し，運動量は

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^j} = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}^j} + qA_j,$$

ハミルトニアンは $H = \boldsymbol{p}\cdot\dot{\boldsymbol{x}} - L = T + q\phi$ である．自由粒子の場合と比べると，それぞれベクトル・ポテンシャル，スカラー・ポテンシャルの分だけシフトしている．

2.3 量子力学とゲージ対称性

ポテンシャル $V(\boldsymbol{x},\, t)$ の中の質量 m の粒子に対するシュレーディンガー方程式は，ハミルトニアン $H = \frac{1}{2m}\boldsymbol{p}^2 + V$ に対して

$$p_j \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} \quad (j = 1, 2, 3)$$

とおきかえて得られる微分作用素を $\widehat{H}$ とおくと，

$$i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \widehat{H}\Psi \tag{4}$$

と書ける．$\hbar$ は (プランク定数)/2π である．

$|\Psi|^2$ には確率密度という意味があるが，波動関数 Ψ の偏角には不定性がある．

実数値関数 $\theta(\boldsymbol{x},\, t)$ に対し，確率密度を保つ変換 $\Psi \to \mathrm{e}^{i\theta}\Psi$ のことも**ゲージ変換**と呼ぶ．特に θ が $\boldsymbol{x}$ によらないとき，**大域的ゲージ変換**と呼ぶ．これは，(4) の解を，(4) に対して

$$V \to V - \hbar\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

とおきかえて得られる微分方程式の解に写す．

しかし一般のゲージ変換は，波動関数 Ψ のみたすべき方程式の形を変えてしまう．そこで，電磁場 $(\phi,\, \boldsymbol{A})$ を導入し，ハミルトン力学との対応に従って，(4) において

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} - q\phi, \tag{5}$$

$$-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} \to -i\hbar\frac{\partial}{\partial x^j} + qA_j \tag{6}$$

とおきかえた微分方程式を考える．今度は，波動関数の偏角を時空の点ごとにとりかえると，電磁場がゲージ変換 (3) を受けるだけで，方程式の形は保たれる．また，量子力学の観点からは，このように $(\phi,\, \boldsymbol{A})$ を微分作用素のシフトとして見る

のが自然であることもわかるだろう．

2.4 ゲージ対称性と電荷の保存

静電場の中の荷電粒子の量子力学を考えよう．エネルギー $E = T + q\phi(\boldsymbol{x})$ の粒子の波動関数は，$\mathrm{e}^{-iEt/\hbar}\psi(\boldsymbol{x})$ の形をしている．大域的ゲージ変換を考えて $\phi(\boldsymbol{x}) \to \phi(\boldsymbol{x}) + a$ とすると，波動関数に $\mathrm{e}^{-iat/\hbar}$ という因子がかかる．

電荷 q_{A} の粒子と電荷 q_{B} の粒子が衝突して電荷 q_{C} の粒子になる過程を考えよう．過程の振幅は，始状態の波動関数について線型，終状態の波動関数の複素共役について線型なので，$\phi(\boldsymbol{x}) \to \phi(\boldsymbol{x}) + a$ とすると，この過程の振幅に $\mathrm{e}^{-i(q_{\mathrm{A}}+q_{\mathrm{B}}-q_{\mathrm{C}})at/\hbar}$ という因子がかかる．よって振幅が大域的ゲージ変換で不変な理論においては，$q_{\mathrm{A}} + q_{\mathrm{B}} - q_{\mathrm{C}} = 0$ でなければならない．これは電荷の保存則である．

さらに電荷が局所的にも保存する（離れた場所に瞬間移動しない）ようにするには，ゲージ変換で不変な理論を作ればよい．

3. ゲージ場とベクトル束

3.1 スピン

量子力学において角運動量の各成分は $\hbar$ の整数倍でやりとりされる．粒子の角運動量には，軌道角運動量の他にスピン角運動量がある．これを $\hbar$ で割った量を**スピン**と言う．電子の場合，スピンの成分の値として $\pm 1/2$ のみが許される．したがって，電子の波動関数は 2 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^2$ に値をとる．このベクトル空間には，3 次元空間 $\mathbb{R}^3$ の無限小回転の作用素がパウリのスピン行列によって作用する．また，$\mathbb{C}^2$ のユニタリ変換は $\mathbb{R}^3$ の回転と 2 対 1 で対応する．

プランク定数が角運動量の次元をもつこと，角運動量の各成分の作用素が互いに非可換であること，複素数の必要性など，スピンという現象には量子力学の特徴が最も端的に現れている．

3.2 アイソスピン

電子のスピンが 2 つの状態をとり得たように，内部自由度として N 個の状態をとり得る粒子を考える．これを，アイソスピンという量が N 個の値をとり得る，と表現する．この粒子の波動関数 Ψ は N 次元複素ベクトル空間 $\mathbb{C}^N$ に値をとる．$\mathbb{C}^N$ 上の標準的なエルミート内積

$$\langle (u_a)_{a=1}^N, (v_a)_{a=1}^N \rangle = \sum_{a=1}^N \overline{u_a} v_a$$

に対し，$\langle \Psi, \Psi \rangle$ は確率密度という意味をもつ．今の場合，$\mathbb{C}^N$ のユニタリ変換は，スピンの場合とは異なり，空間の回転とは関係ないものとする．このとき，波動関数 Ψ には，N 次ユニタリ行列 U に対し，$\Psi \to U\Psi$ とする不定性がある．

U が $(\boldsymbol{x}, t)$ に依存する場合には，波動関数 Ψ のみたす微分方程式の形が保たれるように，N 次エルミート行列に値をとる関数 ϕ, $A_j (j = 1, 2, 3)$ を導入して，(5), (6) のようにシュレーディンガー方程式 (4) の中の微分作用素をシフトする．$(\phi, \boldsymbol{A})$ を $U(N)$ **ゲージ場**と呼ぶ．ここで，$U(N)$ は N 次ユニタリ行列全体のなす群を表す．電磁場は $U(1)$ ゲージ場である．$N > 1$ のときは，$U(N)$ がアーベル群でないので，非アーベル・ゲージ場と呼ぶ．

3.3 ベクトル束

波動関数の不定性を扱うには，**ベクトル束**の概念が適している．

時空 $M = \mathbb{R}^4$ の各点 p ごとに，N 次元複素ベクトル空間 W_p，およびベクトル空間の同型 $\varphi_p : W_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^N$ が与えられているとする．このとき，本当の波動関数は，各点 p にベクトル $\widehat{\Psi}(p) \in W_p$ を対応させるものと考えよう．普通の意味の波動関数 Ψ は，言わばその影であって，$\Psi(p) = \varphi_p(\widehat{\Psi}(p))$ によって定まる．

$W = \coprod_{p \in M} W_p$ とおき，写像 $\pi : W \to M$ を，$w \in W_p$ に $p \in M$ を対応させるものと定義する．このとき，ベクトル空間 W_p を p 上の**ファイバー**と呼ぶ．$p \mapsto \widehat{\Psi}(p)$ は，M から W への写像と解釈できる．一般に，写像 $\sigma : M \to W$ で，$\sigma(p) \in W_p$ $(p \in M)$ をみたすものを，W の切断と言う．本当の波動関数は，ベクトル束の切断なのである．

ベクトル空間の同型の族 $\{\varphi_p : W_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^N\}_{p \in M}$ に対し，写像 $\varphi : W \to M \times \mathbb{C}^N$ を

$$\varphi(w) = (p,\, \varphi_p(w)) \quad (w \in W_p)$$

によって定める．φ を W の自明化と言う．ここで，自明化 $\varphi_1, \varphi_2 : W \to M \times \mathbb{C}^N$ が両立するとは，$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$，$\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}$ が C^∞ 級であることとする．

W に互いに両立する自明化の族を与えたものを，M 上の**自明なベクトル束**と言う．このとき W に C^∞ 多様体の構造が定義される．一般のベクトル束は，自明なベクトル束をはりあわせて作る．その正確な定義は述べない．ベクトル束が自明かどうかの判定は，トポロジーの基本問題である．

波動関数の絶対値の 2 乗には，確率密度という意味があった．そこで，各ファイバー W_p にエルミート内積が定義されているとし，これを $\mathbb{C}^N$ の標準的なエルミート内積に写すような自明化のみを以下では考える．

3.4 接続

時空 M の相異なる 2 点 p_0, p_1 におけるファイバー W_{p_0}, W_{p_1} は互いに同型なベクトル空間だが，どのような同型写像によって同一視するかは決まっていない．

一つの方法としては，自明化 $\{\varphi_p : W_p \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^N\}$ を用いて，$\varphi_{p_1}^{-1} \circ \varphi_{p_0} : W_{p_0} \xrightarrow{\sim} W_{p_1}$ により同一視できる．

これより一般的な同一視の方法を与えるのが，**接続**の概念である．まず，近い 2 点 $p, p+\Delta p$ における（エルミート内積を保つ）ファイバーの間の同型

$$\widehat{U}_p^{\Delta p} : W_p \xrightarrow{\sim} W_{p+\Delta p}$$

を考える．p の座標を $(x^\mu)_{\mu=1,2,3,4}$（$x^4 = ct$，$c > 0$ は定数）とすると，N 次歪エルミート行列 $\mathcal{A}_\mu^\varphi$ によって，

$$\varphi_{p+\Delta p} \widehat{U}_p^{\Delta p} {\varphi_p}^{-1} \sim 1 - \mathcal{A}_\mu^\varphi \Delta x^\mu$$

と書ける．（アインシュタインの規約に従い，$\sum_{\mu=1}^4$ を略した．）

離れた 2 点 p_0, p_1 上のファイバーの間の同型は，2 点を結ぶ道

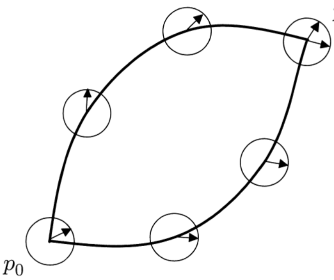


図 1　接続.

$$\gamma : [0,\, 1] \to M, \quad \gamma(0) = p_0, \quad \gamma(1) = p_1$$

の上でこれを積分して得られる．すなわち，同型 $\widehat{U}_\gamma^\tau : W_{p_0} \xrightarrow{\sim} W_{\gamma(\tau)}$ が，

$$U^\tau = \varphi_{\gamma(\tau)} \widehat{U}_\gamma^\tau {\varphi_{p_0}}^{-1} \in U(N)$$

に対する常微分方程式

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \mathcal{A}_\mu^\varphi \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} \right) U^\tau = 0, \quad U^0 = \mathrm{id}$$

から定まる．$\tau = 1$ とおくと，p_0, p_1 上のファイバーの間の同型が得られる（図 1）．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} + \mathcal{A}_\mu^\varphi \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}\tau} (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu^\varphi)$$

（$\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$ とおいた）より，この常微分方程式は，W の切断の空間に作用する微分作用素

$$\nabla_\mu = \varphi^{-1} (\partial_\mu + \mathcal{A}_\mu^\varphi) \varphi \quad (\mu = 1, 2, 3, 4)$$

から定まることがわかる．$(\nabla_\mu)_{\mu=1,2,3,4}$ を W 上の $U(N)$ **接続**と言う．

$\mathcal{A}_\mu^\varphi = 0$ となる自明化 φ が存在するとき，接続 (∇_μ) は**平坦**であると言う．このとき，$[\nabla_\mu,\, \nabla_\nu] = 0$ であり，接続 (∇_μ) による 2 点上のファイバーの間の同型は，道のとり方によらず，自明化 φ による同型に一致する．

3.5 曲率

接続 (∇_μ) に対し，

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\mu\nu} &= [\nabla_\mu,\, \nabla_\nu] \\ &= \varphi^{-1} (\partial_\mu \mathcal{A}_\nu^\varphi - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu^\varphi + [\mathcal{A}_\mu^\varphi,\, \mathcal{A}_\nu^\varphi]) \varphi \end{aligned}$$

を**曲率**と言う．曲率が 0 になること，接続による 2 点上のファイバーの間の同型が道のとり方によ

らないこと，接続が平坦であることは互いに同値になる．

曲率に対し，**ビアンキの恒等式**

$$[\nabla_\mu, \mathcal{F}_{\nu\rho}] + [\nabla_\nu, \mathcal{F}_{\rho\mu}] + [\nabla_\rho, \mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0$$

が成立する．

3.6 ゲージ変換

ユニタリ変換の族 $\{g_p : W_p \xrightarrow{\sim} W_p\}_{p\in M}$ で，C^∞ 微分同相

$$g : W \xrightarrow{\sim} W, \quad g(w_p) = g_p(w_p) \quad (w_p \in W_p)$$

を定めるものを $U(N)$ **ゲージ変換**と言う．これは，接続 (∇_μ) を $(g^{-1}\nabla_\mu g)$ に，その曲率 $(\mathcal{F}_{\mu\nu})$ を $(g^{-1}\mathcal{F}_{\mu\nu}g)$ に写す．$U(1)$ 接続の場合，曲率はゲージ変換で不変である．

3.7 物理的解釈

$U(N)$ ゲージ場は $U(N)$ 接続に他ならない．

電磁場すなわち $U(1)$ ゲージ場の場合，電場・磁束密度は曲率と解釈できる．電場 E_j は $\mathcal{F}_{j4}$ の，磁束密度 B_{jk} は $\mathcal{F}_{jk}$ の（純虚数の）定数倍である．磁場に対するガウスの法則とファラデーの法則は，ビアンキの恒等式に対応している．

4. 電磁場とトポロジー

4.1 ガウスの法則

そもそも電磁場というものは，荷電粒子の間に働く力を**近接作用**の立場で解釈する際に導入された概念であった．すなわち，

(1) 荷電粒子が周囲の電磁場に影響をおよぼし，

(2) それが有限の速さで空間内を伝わって，

(3) 別の荷電粒子に達してこれに作用する，

という描像である．

ここまでは，(3) の荷電粒子が電磁場から受ける力について述べてきた．次に，(1) の荷電粒子の周囲にできる電磁場について見ていこう．

電場 E_j $(j = 1, 2, 3)$ に対し，

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0(E_1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 + E_2 \mathrm{d}x^3 \mathrm{d}x^1 + E_3 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2)$$

とおき，これを電束密度と呼ぶ．ε_0 は真空の誘電率という定数である．基本は次の法則である：

ガウスの法則　閉曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ 上の面積分 $\int_\Sigma \mathcal{D}$ は，Σ で囲まれる領域に含まれる荷電粒子の電荷の和に等しい．

鑑賞　これはトポロジー的な法則と言える．「閉曲面で囲まれる領域」というのがそもそもトポロジーの概念なのである．また面積分の値は，荷電粒子が領域の中のどの位置にあるかによらないし，閉曲面を荷電粒子に触らないように変形しても変わらない．

4.2 近接作用による考え

重要なのは，電磁場が時間的に変動していても，各時刻でガウスの法則が成立するという事実である．

近接作用の描像からは，これは一見，不思議なことのように思われる．すなわち，ある時刻における荷電粒子 Q は，同時刻の離れた位置にある閉曲面 Σ 上の電磁場に何の影響もおよぼさないはずである．にも関わらず，なぜ法則は成立するのであろうか？

考察　Σ 上の電束密度の面積分に Q が寄与しているということは，Q が過去に周囲の電磁場に与えた影響が，今 Σ に届いているということである．ガウスの法則は，過去の Q による Σ への寄与が，今の Q からわかると言っているのである．そのためには，電荷が突然出現したり消滅したり瞬間移動したりしてはいけない（電荷の局所的保存）．

一方，ガウスの法則のトポロジー的な特質は，近接作用の描像では当然のことである．閉曲面上の電磁場に寄与するのは過去の荷電粒子だから，荷電粒子の現在の位置が少し変わっても影響はないのである．

4.3 絡み数

近接作用の描像によれば，閉曲面 $\Sigma \subset \mathbb{R}^3 \times \{t_0\}$ 上の電磁場に影響するのは時刻 t_0 より過去の荷電粒子であり，またそれがどれくらい過去かは Σ

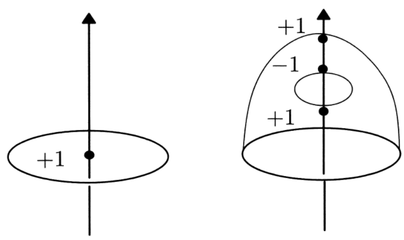


図 2　絡み数.

の点ごとに異なる．となると，Σ 上の電磁場を決めるのは，同時刻の荷電粒子というより，荷電粒子の世界線（時空における粒子の軌跡）と見たほうが自然であろう．そこでガウスの法則を次のように定式化する．

$$\int_\Sigma \mathcal{D} = \sum_{\mathrm{Q}} q_{\mathrm{Q}}\, \mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}},\, \Sigma).$$

ここで，$q_{\mathrm{Q}}, L_{\mathrm{Q}}$ は荷電粒子 Q の電荷と世界線，$\mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}},\, \Sigma)$ は L_{Q} と Σ の**絡み数**（linking number，まつわり数）という位相不変量である．Σ が時空の中で張る 3 次元の膜 B と L_{Q} の交点を符号をつけて数えたものが絡み数である（図 2）．今の場合，B を時刻 t_0 の空間内にとれば，L_{Q} が B を通るとき絡み数は 1，通らないとき 0 になるので，ガウスの法則のもとの形が再現される．

このように定式化すると，今度は $\Sigma, \mathcal{D}$ のほうを $\mathbb{R}^3 \times \{t_0\}$ 上の閉曲面と微分形式に限定しているのが不自然に見えてくる．

そこで $\mathcal{D}$ を時空全体に拡張する．電磁場を $U(1)$ ゲージ場と見なすとき，電場 (E_j) は曲率 $(\mathcal{F}_{\mu\nu})$ の一部の定数倍であった．そして $*\mathcal{F}_{ij} = \mathcal{F}_{k4}$, $*\mathcal{F}_{k4} = -\mathcal{F}_{ij}$ (i, j, k は 1, 2, 3 の偶置換）とおくと，$\mathcal{D}$ は $*\mathcal{F} = \frac{1}{2} * \mathcal{F}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$ を $\mathbb{R}^3 \times \{t_0\}$ に制限したものの定数倍になる．これに対して，Σ が時空の中の閉曲面である場合にガウスの法則を一般化した式を書くと，

$$\int_\Sigma *\mathcal{F} = \mathrm{const.} \sum_{\mathrm{Q}} i\, q_{\mathrm{Q}}\, \mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}},\, \Sigma) \qquad (7)$$

となる．特に，$D \subset \mathbb{R}^3$ を円板，Σ を円柱 $D \times [t_0,\, t_1]$ の境界とすると，この方程式はアンペール・マクスウェルの法則の積分形を時間について積分したものに他ならない．このとき，円柱の上面・底面上の面積分が，変位電流の項に対応している．絡み数 $\mathrm{Lk}(L_{\mathrm{Q}},\, \Sigma)$ は，時刻 t_0 から t_1 までに荷電粒子 Q が円板 D を何回横切ったかである．

そもそも定常電流に対するアンペールの法則は，3 次元空間内の 2 つの閉曲線の絡み数によって理解できる[1)]．マクスウェルによる変位電流の項の導入は，この議論を 4 次元空間内の閉曲面と曲線の絡み数に拡張することに相当しているのである．

4.4 ヤン・ミルズ方程式

方程式 (7) を微分形で書くと，ストークスの定理より，真空中で $\mathrm{d} * \mathcal{F} = 0$ となる．これを座標で書くと，

$$\partial_\mu * \mathcal{F}_{\nu\rho} + \partial_\nu * \mathcal{F}_{\rho\mu} + \partial_\rho * \mathcal{F}_{\mu\nu} = 0.$$

この微分方程式を，$U(N)$ ゲージ場の場合に，ゲージ変換で不変になるように拡張したものが，**ヤン・ミルズ方程式**

$$[\nabla_\mu,\, *\mathcal{F}_{\nu\rho}] + [\nabla_\nu,\, *\mathcal{F}_{\rho\mu}] + [\nabla_\rho,\, *\mathcal{F}_{\mu\nu}] = 0$$

である．$*\mathcal{F}$ を定義するのに，ローレンツ計量

$$(\mathrm{d}x^1)^2 + (\mathrm{d}x^2)^2 + (\mathrm{d}x^3)^2 - (\mathrm{d}x^4)^2$$

を用いる．ローレンツ計量を保つ変換に対し，ヤン・ミルズ方程式は不変である．

このローレンツ対称性は，近接作用論の精密な表現である．すなわち，はじめに $x^4 = ct$ とおいたが，ローレンツ対称性をもつ理論においては，定数 c が力の伝わる速さの限界を与えている．

参考文献

1)　深谷賢治,『電磁場とベクトル解析』，岩波書店.

（はしもと・よしたけ，大阪市立大学大学院理学研究科）

アインシュタイン方程式と対称性

白水 徹也

1. 究極の力学への道

一般相対性理論は物理学法則がどの観測者から見ても不変であるという実験事実と信念の下に作られた美しい理論物理体系である．一見，観測する現象は観測者に依存しているため，不変性の存在を洞察するのは一般に難しい．古くはNewtonの運動方程式が慣性系間の変換（ガリレイ変換と呼ばれる）で不変であることが知られている．慣性系とは，素朴には力が働いていない系のことである．そのうちのある静止系に対して，等速直線運動する観測者はすべて慣性系の観測者である．この慣性系を想像できた300年も前の先人たちの洞察力には感服である，と言ってしまうのは私だけだろうか．

Newtonの運動方程式は慣性系間の変換の下で不変であると述べた．現代の理論物理学では，実験結果からあるいは純理論的に系に潜む対称性を指導原理にすることが多い．対称性を決定し，以下に述べるような作用原理を用いて系の満たす運動方程式を導くのである．例えば，現代物理学では粒子間に働く力は4つあることが知られている．電磁気力，弱い力，強い力，重力である．そして，各々の力は対称性と深く結びついている．そして，この対称性によって粒子の分類がなされている．現実の自然現象に対してこのような美しい理論体系が存在し，それを用い未開拓領域に足を踏み入れることのできる物理学者に私自身も学生の頃に憧れたものである．

一方で，自然ではしばしば対称性の破れが存在することも知られている．その中でも自発的対称性の破れの理解によって2008年のノーベル物理学賞を南部陽一郎が受けている．本稿の内容もそれに合わせて，「対称性」を主題とするのではなく「対称性の破れ」を主題とするのが妥当ではないかという思いが脳裏によぎったが，話題が収束しなくなるので踏みとどまることとしよう．

さて，一般相対性理論．時空に関する人類が手にした中で最も美しい理論体系であろう．幾何学的に美しく記述されているのである．もちろん美しい理論はたくさんある．手近なところで電磁気力を記述するMaxwell理論などもそうであろう．しかし，多くの物理学と異なり，人々を魅了して止まないのは一般相対性理論が時間と空間を相手にしている点である．他の物理法則では，時空は単なる入れ物であり，それが時間的に変化することはない．一方で，一般相対性理論は時空の変化を扱うのである．驚くべきことにこの理論の素晴らしさは，理論が美しいだけでなく，この理論が様々な宇宙で起こる現象を説明する点である．水星の近日点移動，宇宙膨張，などなど．

その一般相対性理論の持つ美しさ「対称性」を，本稿で少しでもお伝えできれば幸いである．また，ブラックホールの対称性に関する研究についても紹介したい．2節では物理学になじみの薄い読者を想定し，解析力学の簡単な復習からはじめ一般

相対性理論の解説を行う．物理学を専攻している多くの読者は2.3節以降を読まれたし．3節では一般相対性理論から予言される異質な天体ブラックホールの美しさ，すなわちその形が軸対称になることを示す．ブラックホールは重たい星の重力崩壊の結果として現れると考えられている．この時空が主に重力で支配されていることを考えると，ブラックホールの形状に美しさを伴うことは容易に想像できることかもしれない．

2. 一般相対性理論の対称性：一般共変性

一般相対性理論の美しさを手短に理解する方法の一つに，解析力学から辿る道があるであろう[1)]．初学者のためにまず最小作用の原理の導入からはじめ，Newton 力学，特殊相対性理論を経て一般相対性理論への扉をたたくとしよう．

2.1 最小作用の原理

運動の法則は最小作用の原理から決まる．時刻 t での質点の位置を $x(t)$ で表すことにしよう．次に運動を決める前に質点の位置 $x(t)$ と速度 $\dot{x}(t)$ の関数 $L[x(t),\dot{x}(t)]$ を考える．ここで t は時間座標でドットは時間微分である．この関数はラグランジアンと呼ばれている．さらに始点と終点の時刻まで時間積分したもの，すなわち

$$S=\int_{t_i}^{t_f} dtL(x,\dot{x}) \tag{1}$$

を導入する．この関数は作用関数と呼ばれている．この時点で運動はまだ決めていないことに注意されたい．そこで次のような変分問題を考える．始点と終点の位置 $x(t_i)=x_i, x(t_f)=x_f$ を固定し，ありとあらゆる勝手な運動のパターンを考える．その中で現実の運動は作用関数を最小にするように決まっていると考えるのである．方程式の導出の詳細については解析力学の教科書を参照されたし．結果は

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\Big)-\frac{\partial L}{\partial x}=0 \tag{2}$$

で与えられる．この方程式が Newton の運動方程式と何の関係があるのか，と思うかもしれないが，例えば $L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2-V(x)$ とすると，$m\ddot{x}=-\partial_x V(x)$ で与えられる．ここで m は質点の質量, $V(x)$ を位置エネルギーとすれば, その位置エネルギー下での運動方程式を与えることになる．L の中の第一項は運動エネルギーと呼ばれる．位置エネルギーの例として，$V(x)=(1/2)m\omega^2x^2$ を考えてみよう．すると運動方程式は $m\ddot{x}=-m\omega^2x$ となって，振動解 $x(t)=A\cos\omega t+B\sin\omega t$ によって運動は記述される．A,B は初期条件で決まる定数である．このことからも容易に想像できるように，$-\partial_x V(x)$ は力を表していることになっている．

次に，慣性系なるものを考察するため，$V=$ 一定としてみよう．このとき系に力は働かない．この系では静止している物質は永久に静止し続ける．また，等速運動する物質は永久に等速運動し続ける．このとき運動方程式は $m\ddot{x}=0$ となり，一般性を失うことなく定数のポテンシャルをゼロと選ぶことができる．すなわち，$L=\frac{1}{2}m\dot{x}^2$．慣性系間の座標変換は $X=x-vt$(**ガリレイ変換**) で与えられる．ここで v は定数で，速度に対応する．$X(t)$ を用いて運動方程式，ラグランジアンを変数を書き直すと，$m\ddot{X}=0$, $L=\frac{1}{2}m(\dot{X}-v)^2=\frac{1}{2}m\dot{X}^2+\frac{d}{dt}(mXv+mv^2t/2)$ となる．ラグランジアンに関しては，第二項の部分が変更を受けている．ただし，このように全微分の形でラグランジアンに入っている場合は，変分原理を適用すると，運動方程式に影響しないことが一般にわかっている．この意味で作用関数はガリレイ変換の下で不変であると言える．逆に言うと，ガリレイ変換の下で不変な作用関数が $L=(1/2)mv^2$ のように与えられると言ってよい．

2.2 特殊相対性理論

さて，このガリレイ変換，電磁場を記述する Maxwell 方程式との相性が悪い．Maxwell 方程式は時間と空間を混ぜたローレンツ変換の下で不変である．ローレンツ変換は時間も含めた次のような微小間隔要素（計量）

$$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 \tag{3}$$

を不変にするようなものである．ここで c は光の速さである．普通と異なるのは時間軸方向が空間の x, y, z 軸方向と異なりマイナスになっている点である．このローレンツ変換の下で不変になるような自由粒子の作用関数は

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1-(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)/c^2}\, dt$$
$$= -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} \sqrt{1-(v/c)^2}\, dt \qquad (4)$$

で与えられる．ここで $v^2 = \dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$. Newton 力学との対応を見るために，速さ v が光速 c よりも十分小さい場合を考えてみよう．このとき作用関数の被積分関数の中で $\sqrt{1-(v/c)^2} \simeq 1-(1/2)(v/c)^2+\cdots$ のように展開でき，

$$S = \int_{t_i}^{t_f} \left(-mc^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{v}{c}\right)^2 + \cdots\right) dt \quad (5)$$

となる．第一項は変分する際に寄与しないので，運動方程式には寄与しない．従って，式 (5) は Newton 力学における自由粒子の作用関数が近似的に導出されることがわかった．換言すれば，Newton 力学における自由粒子の記述は，粒子の速さが光速よりも十分遅い場合にのみ成り立つ近似理論にすぎなかった，ということになる．

特殊相対性理論では Maxwell 方程式を変更することなく，Newton の運動方程式をローレンツ変換の下で不変になるように変更することで折り合いをつけたのである．この理論の正しさは高エネルギー現象の様々な場面で高い精度で検証されている．

2.3 一般相対性理論

ローレンツ変換は慣性系間での座標変換であった．しかし，我々は重力によって加速度を受けていることを日頃から経験している．そこで，電磁気力と力学をうまく融合させたように，重力も同様の枠組みで記述できないか，と考えるのは自然である．それが一般相対性理論である．すべての物理法則は一般の座標変換の下で不変であるべし，ということである．これが一般相対性原理である．

さて，我々は日常的に重力を感じている．しかし，自由落下系を考えれば局所的には消えてしまう．一方で，有限の大きさをもった物体に対しては潮汐力が働く．この状況と相性のよい数学がリーマン幾何学である．そこでは，時空の微小間隔要素（計量）は

$$ds^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} g_{\mu\nu}(t,x,y,z)dx^\mu dx^\nu \qquad (6)$$

で与えられる．x^0 は時間座標に，x^1, x^2, x^3 は空間座標に対応する．以後，同じギリシア文字の添え字が上下にあれば 0 から 3 まで和をとっているものとする．例えば $X^\mu Y_\mu = X^0Y_0 + X^1Y_1 + X^2Y_2 + X^3Y_3$．このとき自由粒子の作用関数は

$$S = -mc^2 \int \sqrt{-g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\nu}{d\tau}}\, d\tau. \qquad (7)$$

ここで τ は自由粒子の時間座標である．$x^\mu(\tau)$ について変分をとると，

$$u^\mu(\partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}u^\alpha) = 0 \qquad (8)$$

が得られる．ここで $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, $\Gamma^\nu_{\mu\alpha} = (1/2)g^{\nu\beta}(\partial_\mu g_{\beta\alpha} + \partial_\alpha g_{\beta\mu} - \partial_\beta g_{\mu\alpha})$, $g^{\alpha\beta}$ は $g_{\alpha\beta}$ の逆行列である．また，τ を $-g_{\mu\nu}dx^\mu(\tau)dx^\nu(\tau) = d\tau^2$ を満たす固有時間と呼ばれるものに選んでいる．この $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ が重力を表していると考えるのである．曲がった時空上の自由粒子の軌道は，測地線と呼ばれている．すこし曖昧ではあるが，この軌道は曲がった時空において“まっすぐ”運動していると表現できるであろう．この軌道が平行移動の自然な定義を与える．そのように考えると，測地線の方程式 $u^\mu\nabla_\mu u^\nu := u^\mu(\partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\alpha}u^\alpha) = 0$ は 4 元速度 u^μ が平行移動で変化しないということを意味していることがわかる．このことをもって，“まっすぐ”という言葉がふさわしいことが理解できたと思う．ここで微分演算子 ∇_μ を定義したが，共変微分と呼ばれている．曲がった時空での共変性を保つ微分の定義になっている．実際に任意のベクトル V_μ に共変微分を作用させたものに対して座標変換の下で

$$\nabla'_\mu V'_\nu = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu}\nabla_\alpha V_\beta \qquad (9)$$

のようにテンソルのように振る舞うことが確認できる*1)．

さて $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ が曲がった時空を反映している量には違いないが，まだ問題がある．なぜならこの $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ は自由落下系（つまり局所慣性系）ではゼロとなってしまう．無論，この性質はよいことであるが，万有引力の法則の一般相対性理論版を得ることができない．そこで鍵を握るのが潮汐力である．潮汐力を考えるには一点では無理である．2 点間の働く力の差を考える必要がある．そこでわずかに離れた 2 本の測地線を考えよう．ξ^{α} を測地線間の“距離”を特徴付ける測地線に垂直なベクトルとしよう．すると測地偏差方程式

$$u^{\alpha}\nabla_{\alpha}(u^{\beta}\nabla_{\beta}\xi^{\mu}) = -R^{\mu}{}_{\alpha\nu\beta}u^{\alpha}u^{\beta}\xi^{\nu} \quad (10)$$

が得られる*2)．ここで $R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}$ はリーマン曲率テンソルと呼ばれ，$\Gamma^{\mu}_{\alpha\beta}$ を用いて次のように定義されている

$$R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta} = \partial_{\nu}\Gamma^{\alpha}_{\mu\beta} - \partial_{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} + \Gamma^{\alpha}_{\nu\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\beta} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\rho}\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}. \quad (11)$$

この量が潮汐力を表しており，右辺の最初の二項が局所慣性系でも消えることなく残ることになる．

以上で Einstein 方程式導出の準備が整った．指導原理は一般座標変換に対する不変性である．すなわち，作用関数はこの変換の下で不変であることが要請される．これは作用関数の被積分関数が座標変換に対してスカラー関数（座標変換 $x^{\mu} \to x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu})$ に対して $F'(x'^{\mu}) = F(x^{\mu})$ と振る舞う量として定義されている）であることを強いる．重力場を表す $g_{\mu\nu}$ から作られるスカラー関数で局所的に消えない量としてリーマン曲率テンソルから作った $R = R^{\alpha}{}_{\mu\nu\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}g^{\mu\beta}$ がある．従って，重力場の作用関数として

$$\int d^4x\sqrt{-g}R \quad (12)$$

が候補に挙がる．ここで積分は 4 次元時空について行われており，g は $g_{\mu\nu}$ の行列式 $\det(g_{\mu\nu}) = g$ である．$d^4x\sqrt{-g}$ のひとまとめで座標変換に対して不変，つまり座標変換に関してスカラー的に振る舞うことがわかる．これが 4 次元時空の微小固有体積要素となっているのである．R もスカラー関数であるから，(12) 式の作用関数は座標変換に対して不変であることが保障されている．なお，この作用関数は $g_{\mu\nu}$ と $\partial_{\alpha}g_{\mu\nu}$ の関数であり，変分は $g_{\mu\nu}$ で行う．詳細は割愛するが，物質場の作用関数と合わせて，計量 $g_{\mu\nu}$ で変分をとることによって，重力場の方程式，Einstein 方程式

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \quad (13)$$

が得られる．$R_{\mu\nu}$ は $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\beta\nu}\delta^{\beta}_{\alpha}$ で定義されリッチテンソルと呼ばれている．G は Newton の重力定数，$T_{\mu\nu}$ は物質場の運動量エネルギーテンソルである*3)．

なんとも美しい導出である．

3. ブラックホールの対称性

3.1 4 次元ブラックホールの対称性

1960～70 年代にブラックホール研究の黄金時代とも呼ばれる時代があった．その期間に Hawking らを含めた若手の相対論研究者がたどり着いた重要な結果の一つが，ブラックホールの唯一性定理であろう．定常なブラックホールを記述する時空は真空の Einstein 方程式の質量と角運動量によって決まる Kerr 解に限られるのである．定常とは時空が時間 t に依存していないような状態を指す．このとき計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(r,\theta,\phi)dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (14)$$

r, θ, ϕ は無限遠方で極座標に対応しており，無限遠方で計量は

---

*1) ベクトルやテンソル自体は座標に依存しないが，その座標成分はもちろん座標に依存する．ただし，座標変換した際の規則が決まっている．例えば，

$$V'_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x'^{\mu_2}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_n}}{\partial x'^{\mu_n}}V_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n},$$
$$V'^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \frac{\partial x'^{\mu_1}}{\partial x^{\nu_1}}\frac{\partial x'^{\mu_2}}{\partial x^{\nu_2}}\cdots\frac{\partial x'^{\mu_n}}{\partial x^{\nu_n}}V^{\nu_1\nu_2\cdots\nu_n}.$$

*2) この導出で u^{α} と ξ^{β} が可換であること ($[u,\xi]^{\alpha} = 0$) を用いている．

*3) 物質場の作用関数を計量で変分することによって得られる．$T_{\mu\nu}$ の時間・時間成分はエネルギー密度を与える．

$$ds^2 \to -c^2dt^2+dr^2+r^2(d\theta+\sin^2\theta d\phi^2) \quad (15)$$

となるようなものである．またブラックホールの表面である事象の地平面の空間的なトポロジーは2次元球面であることがHawkingによって示されている．

定理の証明ではまず定常真空なブラックホールは軸対称であることを示す．その結果，時空の計量は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(r,\theta)dx^\mu dx^\nu \quad (16)$$

のように ϕ 依存性がなくなる．この時点でEinstein方程式は「2次元空間 (r,θ)」上の楕円型偏微分方程式に帰着する．そして質量 M と角運動量 J によって特徴付けられる無限遠方の計量の振舞いと，ブラックホールの事象の地平面上での正則性から偏微分方程式の解の一意性が証明できるのである．その詳細は幾分技術的であるので省略する．

次にこの定理の意義について考えてみよう．なぜ，この定理が重要と思われているのか．ブラックホールは重たい星の重力崩壊の最終状態だと考えられている．重量崩壊後十分時間が経過すれば，重力波などの放出により時空は定常時空になると考えられるであろう．そうすると上記の唯一性定理が適用され，時空がKerr解のみによって記述されることになるのである．この定常状態に至る過程は数値シミュレーションによって確かめられている．いずれにせよ，複雑な構造を持っていた星から質量 M と角運動量 J だけで記述できるブラックホールになるというのは驚くべき結果である．直感的には重力波の放出，ブラックホール形成後に系を支配している物理法則が空間的スケールの入ってこない重力だけであることを考慮するとこの結果はもっともらしく思える．しかし，Einstein方程式の複雑な非線形性を考慮するとやはり自明であるとは言い難い．

さらにこの結果は興味深い洞察を誘発することとなる．平衡状態にある熱力学との類似性である．この類似性などからブラックホールのエントロピーが体積ではなく面積に比例していることがわかる．この結論は超弦理論からも説明されるべき事実であるが，超対称性の一部を持った特殊なブラックホールに限れば成功を収めている．また，情報が2次元面で記述されているということからホログラフィー的な考察が生じ，現在ではadS/CFT対応という形で議論が提唱されて10年以上経ても活発に研究が行われ続けている[2]．

3.2 高次元ブラックホールの混乱？

これまでは天体物理学的なブラックホールに焦点を当てていたため考察は4次元時空にとどめていたが，最近，高次元時空におけるブラック“ホール”の研究が進んでいる[3]．古くは事象の地平面が $D-2$ 次元球面の場合（時空の次元は D）に，定常回転するブラックホール解が見つかっていた（Myers–Perry解）[4]．しかし，EmparanとReallによって回転するリング状のブラックリング解が5次元時空で発見されたのである[5]．この解の発見によって困ったことが生じた．唯一性定理が成り立たないのである．なぜなら，同じ質量，角運動量を持つ定常真空解がそれぞれMyers–Perry解，ブラックリング解で存在するからである．質量と角運動量を指定しただけではブラック“ホール”時空が一つに特定できないのである．ブラックリング解に続いて，ブラックホールを中心に木星の輪のようにブラックリングが存在する厳密解ブラックサターン等々，新しい解の発見が続いている．高次元時空ではそもそも事象の地平面のトポロジーが高次元の球面（次元を D とすると $D-2$ 次元球面）でなければならないという制約はない[6]．ただし，5次元では3次元球 S^3 かリング $S^2\times S^1$ のみが許されていることが分かっていた．無論，これまで5次元で発見された厳密解はこの制限を満足している．

では，高次元時空では唯一性定理は成り立たないのであろうか．上述のように唯一性定理を破るような解が発見されているのは，回転している定常時空に限られる．回転のない場合はどうだろうか．素朴な疑問が沸く．リングのような非自明な形状は角運動量による遠心力と重力とのつりあい

で成立していると考えるのは自然であろう．回転しなければ安定に定常にその形状を保つことはできないであろう．実際に，回転のない静的真空ブラックホール解の形は3次元球面であり，高次元Schwarzshild解になることが示されている．この結論は任意の高次元時空で成り立つ．次に定常時空について考えてみよう．5次元時空の計量は一般に

$$ds^2 = g_{MN}(t, r, \theta, \phi, \psi) dx^M dx^N \qquad (17)$$

と書くことができる．添字 M, N は t, r, θ, ϕ, ψ について走り，同じ添字が上下に現れている場合は，5次元の座標について和をとる．上で述べた厳密解は時間 t と2つの角度座標 ϕ, ψ には依存していない．すなわち $g_{MN}(r, \theta)$ のように書けている．4次元ブラックホール時空では定常性から自動的に軸対称であることが導けた．その結果，あまり正確な言い方ではないが，$g_{\mu\nu}(r, \theta, \phi)$ から $g_{\mu\nu}(r, \theta)$ となることがEinstein方程式を解くことなくわかったのである．では5次元の場合はどうであろうか．$g_{MN}(r, \theta, \phi, \psi)$ から $g_{MN}(r, \theta)$ を自動的に示すことができるであろうか．2008年現在分かっていることは $g_{MN}(r, \theta, \phi)$ と ψ の依存性がなくなることが示されているのみである[7]．これはこの証明法が時間座標 t の事象の地平面での巻き付きを利用していることに強く依存している．この巻き付きは4次元時空では2次元球面に巻き付くことになる．2次元球面の場合その軌道は必ず閉じることが知られている．一方で，3次元以上になるとその保障はない．分かっているのは，その軌道は少なくとも一本以上の閉じた軌道の和で書けるということだけである．しかし，少なくとも一本あることがわかっているのであるから，軸対称であることは示せたことになる．従って，真空定常な時空の計量は $g_{MN}(r, \theta, \phi)$ となることがわかった．この「軸対称になる」という結論は任意の高次元で成り立つ．但し，上で述べたように，これまで発見されている5次元時空の厳密解はさらにもう一つの角度座標依存性がない $g_{MN}(r, \theta)$ である．これは $g_{MN}(r, \theta, \phi)$ の形で書けている厳密解が存在する余地を残しているが，未発見である．存在しないかもしれない．また，6以上の高次元時空における高次元球面以外のトポロジーを持つ厳密解も未発見である．知られている厳密解の安定性についても，特別な場合を除いてよくわかってはいない．

4. 結語

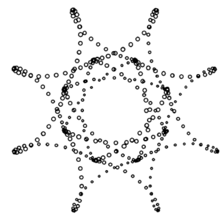
一般相対性理論は重力を記述する理論である．相対性原理を追求することで得られた理論はリーマン幾何学で記述され，とても美しい．さらにこの重力という空間スケールの入ってこない万物に働く力によって予言されるブラックホールの最終状態にも対称性が存在することがわかっていることを見てきた．しかし，高次元ブラック“ホール”についてはまだまだ未解明な点が多い．高次元ブラック“ホール”研究の黄金時代に向かって我々は今足を踏み入れようとしているのであろうか．30年後にこの研究の流れがどのように評価されるか，大変興味深い．

参考文献

1) 最近のテキストとして，早田次郎，『現代物理のための解析力学』SGC ライブラリ **46**，臨時別冊・数理科学 2006年．
2) adS/CFT については，「ゲージ重力対応」数理科学 2008年2月号．
3) 高次元ブラックホール研究のレビューについては R. Emparan and H.S. Reall, *Living Rev. Rel.* **11**, 6 (2008) [arXiv:0801.3471 [hep-th]]; 白水徹也「ブレーンワールドとブラックホール」数理科学 2004年1月号；井田大輔，日本物理学会誌 Vol.**62**, 238 (2007).
4) R.C. Myers and M.J. Perry, *Annals Phys.* **172**, 304 (1986).
5) R. Emparan and H.S. Reall, *Phys. Rev. Lett.* **88**, 101101 (2002).
6) 高次元ブラックホールの形への制限については，G.J. Galloway and R. Schoen, *Commun. Math. Phys.* **266**, 571 (2006).
7) S. Hollands, A. Ishibashi and R.M. Wald, *Commun. Math. Phys.* **271**, 699 (2007).

（しろみず・てつや，京都大学大学院理学研究科）

繰り込み群方程式と対称性



園田　英徳

1. はじめに

繰り込み群は，もともと熱統計系の臨界現象を理解するために導入された概念です．構成の仕方や説明の仕方にはいろいろありますが，本特集のために，微分方程式による繰り込み群の定式化について解説してみたいと思います．

相転移[1)]というと日常生活で一番なじみぶかいのは，1次相転移です．水の温度を上げていくと蒸気圧が1気圧になるのが沸騰で，これはその例です．水は液体と気体でエネルギーが違うので，沸騰は不連続的な変化です．一方，**連続相転移**とよばれる相転移は，名前のとおり，連続的な変化で，いままでゼロだったものがある点を境に連続的にゼロでない値を持っていきます．大学の学生実験でよく測定するものに，磁性体（磁石）の磁化の温度依存性があります．磁石を熱くすると磁化を失いますが，だんだん冷ましていくと，ある温度を境に磁化を回復します（図1）．

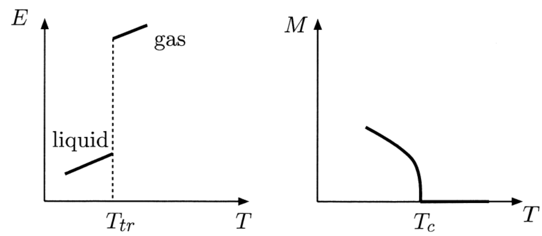


図1　左図（1次相転移）――温度 T_{tr} 以下では液体であるが，それ以上では気体になる．エネルギー E は不連続に変わる．
右図（連続相転移）――磁化は温度 T_c より上ではゼロになる．

連続相転移は**臨界指数**で特徴づけられます．磁石の場合，温度 T における磁化を $M(T)$ と書くと，臨界温度 T_c より低い温度では，

$$M(T) = \text{定数} \cdot (T_c - T)^{\beta}$$

という関係式が成り立ちます．ここで指数 β のことを臨界指数とよびます．臨界指数は複数ありますが，すべてにギリシャ文字が使われ，β のほかにも ν や η 等で表される臨界指数があります．

熱統計系の連続相転移の理解に不可欠なのが繰り込み群です．例えばある磁石を表す統計モデルがあったときに，そのモデルが磁石を的確に表しているかを試すには，臨界温度 T_c や臨界指数 $\beta, \nu, \cdots$ を計算しなければなりません．繰り込み群なしには，このような計算は不可能です．

しかし繰り込み群が重要なのは，臨界指数の計算のためばかりではありません．臨界点（臨界温度のほかに，臨界圧力や臨界密度）付近での系の振舞いの定性的な理解にこそ，むしろ繰り込み群の真価が発揮されます．

2. 繰り込み群変換

臨界指数が実は空間のものさし（スケール）の変換と関係しているというのが，繰り込み群の考えです．具体的に臨界温度 T_c より少し高い温度

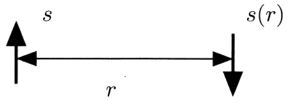


図 2　原子の磁化 $s(r)$ の平均が $M(T)$.

T にある磁石を考えます．磁化はゼロですが，それはあくまでも平均の話で，原子の持つ磁化が熱運動でいろいろな方向を向いていることによります．ある原子の磁化を s と書き，距離 r 離れた原子の磁化を $s(r)$ と書くことにします．温度 T での平均を括弧 $\langle\cdots\rangle_T$ で表すと，いま平均磁化はゼロですから，

$$\langle s\rangle_T = \langle s(r)\rangle_T = 0$$

となります（図 2)．しかし積 $s \cdot s(r)$ の平均 $\langle s \cdot s(r)\rangle_T$ は，ゼロでなく，r が十分大きい場合，指数関数の関係

$$\langle s \cdot s(r)\rangle_T = 定数 \cdot \frac{1}{\xi^{1+\eta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{\xi}}$$

が成り立ちます．ここで ξ のことを**相関長**とよびます．（臨界指数 η については後述.）ξ より離れたところにある 2 つの原子には関係がなくなることを表します．ξ は，温度 T の関数で，T が臨界温度 T_c に近づくにつれて，長くなります．ξ の温度依存性を表す臨界指数が ν で，

$$\xi(T) = 定数 \cdot \frac{1}{(T-T_c)^{\nu}}$$

が成り立ちます．$\nu > 0$ なので，$T = T_c$ で相関長は無限になります．

さて，繰り込み群によれば，異なる温度 T_1 と温度 T_2 の磁石を比べると，温度 T_2 の磁石は温度 T_1 の磁石を別のものさしで見たのと区別できないというのです．ものさしをどう変えたらいいかは，相関長 ξ が教えてくれます．温度 T_1 での相関長を温度 T_2 での相関長と等しくするには，温度 T_1 の磁石に使う距離をもともとの r ではなくて

$$r' \equiv r \cdot \frac{\xi(T_2)}{\xi(T_1)}$$

とすればよいことがわかります（図 3)．この r' を使えば，温度 T_1 の磁石の相関長も $\xi(T_2)$ になります．そこで s と $s(r)$ のことを新たに s' と $s'(r')$ とよぶことにすると

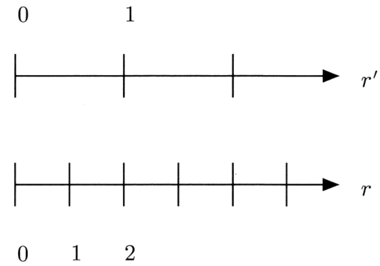


図 3　$\xi(T_2)/\xi(T_1) = 1/2$ の場合, $r = 2$ が $r' = 1$ になるように，ものさしの目盛りを変える.

$$\langle s' \cdot s'(r')\rangle_{T_1} = 定数 \cdot \frac{1}{\xi(T_1)^{1+\eta}}\,\mathrm{e}^{-\frac{r'}{\xi(T_2)}}$$

となって，まだ温度 T_2 の場合とは異なります．指数関数の所は同じですが，巾の所が $\xi(T_2)$ の巾でないからです．本当に同じにするには，磁化を定数倍して，

$$s' \equiv s \cdot \left(\frac{\xi(T_2)}{\xi(T_1)}\right)^{\frac{1+\eta}{2}}, \tag{1}$$

$$s'(r') \equiv s(r) \cdot \left(\frac{\xi(T_2)}{\xi(T_1)}\right)^{\frac{1+\eta}{2}} \tag{2}$$

とすればよく，めでたく

$$\langle s' \cdot s'(r')\rangle_{T_1} = \langle s \cdot s(r')\rangle_{T_2}$$

が得られます．つまり，温度 T_1 の磁石を異なったものさしで見ると別の温度 T_2 の磁石が得られるということです．

いままでは臨界温度より高い温度を考えてきましたが，低い場合にも同じ考えが成り立ちます．この場合は平均磁化がゼロでないので，

$$\langle s'\rangle_{T_1} = \langle s\rangle_{T_2}$$

という関係も得られます．これは

$$\left(\frac{\xi(T_2)}{\xi(T_1)}\right)^{\frac{1+\eta}{2}} M(T_1) = M(T_2)$$

と同じことで，ξ と M の温度依存性を代入すると，臨界指数の間の関係式

$$\nu \cdot \frac{1+\eta}{2} = \beta$$

が得られます．

まとめると，臨界温度のそばでは，温度 T_1 の磁石を異なるものさしで見，さらに原子の磁化を定数倍することによって，別の温度 T_2 の磁石を得ることができます．ものさしの尺度を変え，磁化の規格化を変える操作のことを**繰り込み群変換**とよびます．

最後に**繰り込み群方程式**を導いて，この節を終えましょう．もともとのものさしで L の長さが 1 と測られるものさしを考えます．新しいものさしで測る相関長は，もとの $1/L$ 倍になります．これを表す微分方程式は

$$L\frac{d}{dL}\xi = -\xi$$

です．よって，さらに相関長 ξ と温度 T の関係式から

$$L\frac{d}{dL}(T-T_c) = \frac{1}{\nu}(T-T_c)$$

を得ます．相関長は温度によって決まることを考えると，基本的なのは温度の L 依存性を表すこの方程式のほうで，これが磁石の繰り込み群方程式です．温度の L 依存性は，

$$T - T_c = 定数 \cdot L^{\frac{1}{\nu}}$$

と与えられます．L を長くすることで，より臨界温度から離れた磁石が得られるわけです．

■ 3. 繰り込み群の流れと不動点 ■

ものさしを変えることがいかに臨界現象に関係しているかを説明するために，前節では磁石を導入しましたが，磁石を表す具体的な統計模型を考えたわけではありません．具体的な統計模型には温度の他にもいくつかパラメタがあります．あるパラメタの値に対応する模型を目盛りの異なるものさしを使って見てみるのが繰り込み群変換になります．パラメタの値はものさしの尺度を表す L に依存し，その L 依存性を与えるのが，繰り込み群方程式です．一般にパラメタを $g_i\,(i=1,2,\cdots)$ と書くとすると，繰り込み群方程式は，常微分方程式

$$L\frac{d}{dL}g_i = f_i(g_1, g_2, \cdots) \quad (i=1,2,\cdots)$$

として与えられます．パラメタの数を有限個に保ったままで繰り込み群変換を行うことは通常難しく，なんらかの近似をしないと，一般に無限個パラメタが必要になります．あとで少しだけ説明する厳密繰り込み群変換の場合，パラメタの数は無限です．

繰り込み群方程式の重要な特徴は，右辺がものさしの目盛りを表す L に依存しないことです．L から L' にものさしを変えるにあたって，重要なのは L' と L の比 $\frac{L'}{L}$ だけなので，微分方程式として表すと，f_i は L の絶対値には依存してはならないことになります．

前節の磁石の例では，

$$\begin{cases} g_1 = T - T_c, \\ f_1(g) = \frac{1}{\nu}g \end{cases}$$

となります．この単純な例からも推察されるとおり，臨界現象にとって重要な臨界指数は，繰り込み群方程式の性質として現れてきます．

パラメタ g_i をそれぞれ空間座標と思うと，空間はいろいろなパラメタの値に対応する統計模型からなる**理論空間**です．パラメタの L 依存性を追っていくと，理論空間の中での流れ，**繰り込み群の流れ**，が得られます．この流れにとっていちばん重要なのは，流れがとまってしまう**不動点**です．不動点のパラメタの値を g_i^* で表すと，

$$f_i(g_1^*, g_2^*, \cdots) = 0 \quad (i=1,2,\cdots)$$

が満たされます．不動点の近傍で，f_i を線形近似して，線形の繰り込み群方程式

$$L\frac{d}{dL}(g_i - g_i^*) = \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial g_j}\bigg|_{g^*}(g_j - g_j^*)$$

を得ます．$g_i - g_i^*$ の適当な線形結合

$$\bar{g}_i = \sum_j A_{ij}\,(g_j - g_j^*)$$

を導入して，繰り込み群方程式を対角化することができます．

$$L\frac{d}{dL}\bar{g}_i = y_i \bar{g}_i.$$

これは $\bar{g}_i$ の L 依存性が

$$\bar{g}_i = \text{定数} \cdot L^{y_i}$$

で与えられることを意味します．前節の磁石の例を思い出すと，

$$\bar{g}_i = T - T_c, \quad y_i = \frac{1}{\nu}$$

であることがわかります．つまり繰り込み群方程式を不動点の近傍で線形化して得られる y_i は，臨界指数を表しています．

パラメタの数は無限ですから，臨界指数の数も無限ですが，重要なのは，正の y_i だけです．なぜかというと，y_i が負の $\bar{g}_i$ は L が大きくなるにしたがって，小さくなっていくからです．よって十分大きな L をとれば，これら負の y_i をもつ $\bar{g}_i$ は，無関係になります．正の y_i に対応する臨界指数だけ L が大きくなっても残ります．一般に正の臨界指数は，有限個しかなく，これらに対応するパラメタは **relevant なパラメタ**とよばれます．図 4 は，relevant なパラメタが 1 つしかない場合をイメージして描かれています．不動点から伸びている点線が，$\bar{g}_2 = \bar{g}_3 = \cdots = 0$ で与えられる $\bar{g}_1$ 座標軸を表します．

不動点の近傍に限っていうと，たった 1 つの条件

$$\bar{g}_1 = 0$$

を満たす理論は，すべて L を大きくすると不動点と区別できないことがわかります．L を変えても理論は変わらないのですから，例えば磁化の相関長は無限

$$\xi\big|_{g^*} = \infty$$

となるし，相関関数は

$$\langle s \cdot s(r) \rangle = \text{定数} \cdot \frac{1}{r^{1+\eta}}$$

のように巾の形に振る舞うことがわかります．つまり $\bar{g}_1 = 0$ は，系が臨界温度にあるというのと同じ条件です．

$$\bar{g}_1 = 0 \overset{\text{同値}}{\Longleftrightarrow} T = T_c$$

図 4 で太い線は，温度 T を唯一のパラメタとする理論を表しています．点 A は臨界温度 T_c，点 B は臨界温度から少し外れた場合を表します．

まとめると，臨界指数は，繰り込み群方程式を不動点近傍で線形化することによって，得ることができます．したがって臨界指数は，繰り込み群方程式の性質として得られます．

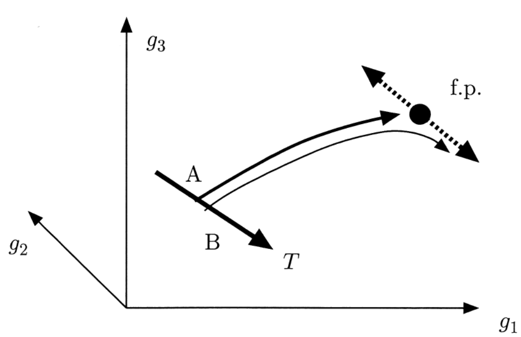


図 4　繰り込み群の流れ――f.p. は不動点．A は臨界温度，B は臨界温度からほんの少しずれた磁石を表す．

■　4. 繰り込み群の素粒子理論への応用　■

2 節で解説した繰り込み群を導入したのは，Leo Kadanoff[2)] ですが，前節でそのおおよそを紹介した本格的な定式化は，Ken Wilson[4)] によってなされました．（F. Wegner も重要な貢献をしています．）Wilson が繰り込み群を導入したのは，実は素粒子理論の研究のためでした．素粒子理論で重要な概念の一つに**繰り込み**があります．繰り込み理論は 1940 年代後半に Tomonaga, Schwinger, Feynman, Dyson らによって開発されたもので，素粒子理論の学生が大学院で絶対に身につけなければならないものの一つです．

繰り込み理論によれば，素粒子の模型には繰り込み可能なものとそうでないものがあり，可能なものは，有限個のパラメタの値によって理論の性質が完全に決まりますが，不可能なものは無限個のパラメタによってしまいます．繰り込み可能な模型を使った実際の計算では，無限から無限を引

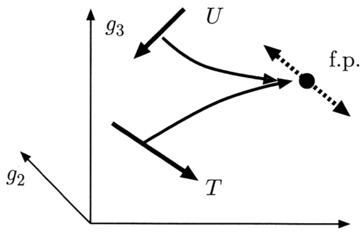


図5　普遍性——点線に対応する繰り込まれた理論は，その構成の仕方によらない．

いて有限の物理量を出すようなちょっとあやしげなことをやります．Wilson はこの操作の背後にある物理を解明することに成功したのです．1970 年頃のことです．

Wilson の考えは，図 4 を使って，だいたい説明することができます．繰り込み可能な理論は，図 4 の点線にあたります．点線は $\bar{g}_1$ を唯一のパラメタとして持ちますが，これが繰り込み可能な理論のパラメタにあたります．一般に繰り込みの流れの不動点は，有限個の relevant なパラメタをもつといいましたが，これは繰り込み可能な理論が有限個しかパラメタを持たないことを表します．

さらに重要な考えに，繰り込まれた理論の**普遍性**があります．不動点から伸びている点線に到達するには，臨界温度の近くにある理論を L の長いものさしで見ればよいわけですが，それには特別な模型から出発する必要はありません．例えば U というパラメタを持つ別の模型があるとします．もし U に臨界の値があって，その臨界点から繰り込みの流れを追っていくと，同じ不動点に到達するかもしれません．そうであれば U をパラメタとして持つ理論を使って，点線の理論を構成することができます．T をパラメタとして持つ理論からも，U をパラメタとして持つ理論からも構成できるわけです（図 5）．

■　5. 拡散方程式　■

後述する厳密繰り込み群方程式は，数学的には**拡散方程式**にとてもよく似ています．厳密繰り込み群方程式よりも数学的にシンプルな拡散方程式をまず説明しましょう．

x 軸上に分布するたくさんの粒子を考えます．それぞれの粒子が x と $x+\Delta x$ の間に存在する確率を

$$P(x)\,\Delta x$$

と表すことにします．

粒子の熱運動を簡単化して，ϵ という短いタイムステップごとにそれぞれの粒子が，右と左に確率 $\frac{1}{2}$ で距離 $v\epsilon$ 移動すると考えます．時間 t たった後の分布を $P(x,t)$ とすると，t 依存性は

$$\partial_t P(x,t) = D\partial_x^2 P(x,t)$$

で与えられます．ここで定数 D は

$$D = \frac{1}{2}v^2\epsilon$$

となります．（$\epsilon \to 0$ で極限が存在するためには，v^2 は ϵ に逆比例していなければなりません．物理的には ϵ は有限で，粒子が衝突せずに自由に運動する時間を表し，v は熱運動の速さを表します．）

拡散方程式の解は，積分の形に

$$P(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} dy\, N(x-y, 2Dt)\, P(y)$$

と得られます．ここで

$$N(x,\sigma^2) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

は分散 σ^2 の**正規分布**を表します（図 6）．

この解には明確な解釈があります．時刻 $t=0$ に場所 y にある粒子が，時刻 t に間隔 $[x, x+\Delta x]$ に存在する確率が

$$N(x-y, 2Dt)\,\Delta x$$

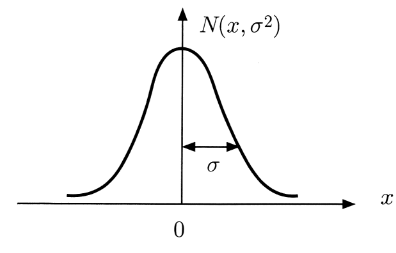


図6　正規分布．x^2 の平均値は，σ^2．

で与えられるということを意味します．したがって $t=0$ における分布 $P(x)$ が何であろうとも，十分長い時間が立てば x 軸上にだらっと広がった分布になってしまうことが分かります．これが拡散現象です．一言つけ加えると，拡散現象およびそれを数学的に表す拡散方程式の確率的な解釈を最初に与えたのは相対論で有名な Einstein です．

$t \to \infty$ ではだらっと広がった分布になってしまうと書きましたが，x 軸のものさしを変えると話は違ってきます．時間 t の後にどれだけ分布が広がるかというと，$N(x, 2Dt)$ の分散の平方根 $\sqrt{2Dt}$ くらいですから，$\sqrt{2Dt}$ の割合で縮めると分散が 1 の正規分布になることが分かります．これを式で表してみましょう．$P(x,t)$ の代わりに

$$P_1(x,t) \equiv \frac{\sqrt{Dt}}{\sigma} P\left(\frac{\sqrt{Dt}}{\sigma} x, t\right)$$

を定義します．σ は任意の距離です．P_1 も

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, P_1(x,t) = 1$$

を満たす確率分布です．$P_1(x,t)$ の満たす微分方程式は，拡散方程式から簡単に

$$\partial_t P_1(x,t) = \frac{1}{2t}\left(1 + x\partial_x + \sigma^2 \partial_x^2\right) P_1(x,t)$$

と得られます．この微分方程式の特徴は，$t \to \infty$ で $P_1(x,t)$ が分散 σ^2 の正規分布に収束することです．

$$\lim_{t\to\infty} P_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$$

要するに，初めはどんな分布でも十分時間がたった後には（スケールを変えることにより）正規分布が得られるということになります（図 7）．これが拡散方程式の重要な性質です．

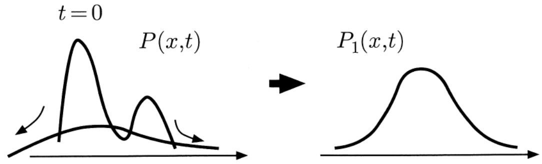


図 7　十分時間がたった後，x 方向に縮めると正規分布が得られる．

繰り込み群の言葉を使えば，確率分布 $P_1(x,t)$ の流れは，その t 依存性を表し，正規分布 $N(x,\sigma^2)$ は

$$\left(1 + x\frac{d}{dx} + \sigma^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) N(x,\sigma^2) = 0$$

を満たす繰り込み群変換の不動点ということになります．

あとの便宜のために，拡散方程式を少し書き換えてこの節を終えましょう．確率分布 $P(x,t)$ は正の関数ですから

$$P(x,t) = \mathrm{e}^{W(x,t)}$$

と表すことができ，$W(x,t)$ は微分方程式

$$\partial_t W(x,t) = D\left(\left(\partial_x W(x,t)\right)^2 + \partial_x^2 W(x,t)\right)$$

を満たします．この方程式が実は 6 節で解説する厳密繰り込み群方程式にとても似ているのです．

6. 厳密繰り込み群方程式

いよいよ筆者の研究対象である**厳密繰り込み群**の解説に入りましょう．厳密繰り込み群の「厳密」がおこがましいということで，汎関数繰り込み群と呼ぶ人たちもいますが，なぜ厳密とよばれるかというと，無限個のパラメタが使われて，3 節で解説した繰り込み群方程式が厳密に成り立っているからです．単に繰り込み群といってもいいのですが，有限個のパラメタで近似していないというのを強調するために，「厳密」を付け加えることが多いです．

素粒子の相互作用を記述する場の理論には，前節の最後に導入した確率分布関数の対数 $W(x)$ にあたるものが必要です．それは作用とよばれます．古典力学における作用とほぼ同じですが，使い方が違います．例えばスピンがゼロの粒子を表すにはスカラー場 $\phi(x)$ を導入します．これは時空間上の関数で，作用はこの関数の関数（汎関数）$S[\phi]$ です．$\phi(x)$ は ϕ_x と書くともっとわかりやすいかもしれません．時空間上の点 x 1 つずつに 1 つの積分変数 ϕ_x があって，作用はそれら無限個の変

数に依存する関数です．スカラー粒子どうしの衝突散乱の確率は，量子力学的な確率振幅の2乗で与えられますが，その確率振幅は，

$$\text{確率振幅} = \int \mathrm{e}^{S[\phi]}\, \phi(x_1)\cdots\phi(x_n) \prod_x d\phi(x)$$

のような無限個の $\phi(x)$ についての積分（汎関数積分）で与えられるのです．これで，作用 S と前節の最後に導入した $W(x)$ との類似が明らかになったでしょうか．

さて，作用を2つの部分に分けて

$$S[\phi] = -\frac{1}{2}\int_p \frac{p^2+m^2}{K(pL)}\phi(p)\phi(-p) + S_L[\phi]$$

と表します．ここでまず $\phi(p)$ は時空上の関数 $\phi(x)$ の Fourier 変換です．波数 p は運動量を表します．m は粒子の質量に関係するパラメタです．$K(p)$ は**カットオフ関数**で，$p^2 > 1$ ですばやくゼロに収束するものとします（図8）．L は作用を定義するために導入した長さのスケールです．運動量 p が $\frac{1}{L}$ より大きい場合，$K(pL)$ は小さいので，上の作用の第1項はとても大きくなります．これは e^S が小さくなることを意味しますから，$p > \frac{1}{L}$ であるような $\phi(p)$ はあまり汎関数積分に寄与しないことが分かります．この L が，磁石の場合と同様に，ものさしの尺度を表します．

L を長くしていくにつれて，理論の内容を保つには S_L を適当に変えていかなければなりません．S_L の L 依存性は，次の**厳密繰り込み群方程式**によって与えられます．

$$L\frac{\partial}{\partial L}S_L[\phi] = \int_p \frac{\Delta(pL)}{p^2+m^2}$$

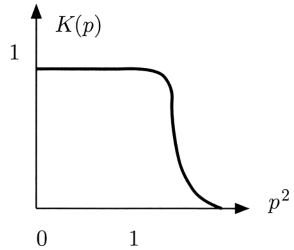
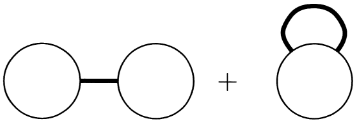


図8　カットオフ関数．


図9　丸は S_L を表し，太線は Δ を表す．

$$\times \frac{1}{2}\left\{ \frac{\delta S_L}{\delta\phi(p)}\frac{\delta S_L}{\delta\phi(-p)} + \frac{\delta^2 S_L}{\delta\phi(p)\delta\phi(-p)} \right\}$$

ここで $\Delta(p)$ はカットオフ関数 $K(p)$ によって

$$\Delta(p) \equiv -2p^2 \frac{dK(p)}{dp^2}$$

と定義されます．Wilson が文献4) で与えた微分方程式は，これとは少し異なり，上の形に最初に書いたのは J. Polchinski です．微分方程式の右辺をグラフで表したのが図9です．厳密繰り込み群方程式の解は形式的に積分公式

$$\mathrm{e}^{S_L[\phi]} = \exp\left[\frac{1}{2}\int_p \frac{K(pL')-K(pL)}{p^2+m^2} \times \frac{\delta}{\delta\phi(p)}\frac{\delta}{\delta\phi(-p)}\right]\mathrm{e}^{S_{L'}[\phi]}$$

で与えられます．この解と拡散方程式の解との類似は明らかでしょう．ただこの積分は無限次元の積分なので，積分を厳密に実行することは，少なくとも今のところは不可能です．

しかし厳密繰り込み群方程式は，微分方程式の解として理論を構成する手法を与えてくれ，さらに理論の繰り込み可能性を S_L の $L \to 0$ での漸近的振舞いによって導入することができるので，厳密繰り込み群方程式は，素粒子の理論の確かな定式化を与えてくれます．

拡散方程式と同じように，上の厳密繰り込み群方程式に不動点はありません．不動点を持つような繰り込み群方程式にするには，作用 S_L を少し変形する必要があります．この変形は，拡散方程式を P_1 について変形したのと類似していますが，ここでは省略します．

■ 7. 最後に ■

表題の後半にあたる対称性の話はできず，羊頭

狗肉になってしまいました．ほんの一言だけ書くと，理論の対称性は場の変数 $\phi(x)$ の対称変換の下での作用の不変性として表すことができます．この不変性は繰り込み群方程式とつじつまが合うもので，ある L で S_L が不変ならば，どんな L でも S_L は不変になります．また作用の不変性は，物理的には保存則を意味します．この辺の話は，またの機会に書かせていただこうと思います．

最後に参考文献を紹介します．Stanley の教科書[1)]は少し古いですが，臨界現象についての優れた入門書で，学部生でも読めると思います．（私はもっと後に読みましたが．）Kadanoff の論文[2)]は古典ですが，直感的な議論はいまだに新鮮です．Ken Wilson のノーベル賞講演[3)]は一読の価値があります．繰り込み群変換についての初等的な説明のほか，彼の思い出話が書いてありとても楽しく読めます．Wilson の繰り込み群[4)]に関しては，やはり発見者自身の講義録がいまだにいちばん優れていると思います．最後のわたしの講義録[5)]は，Wilson–Kogut[4)]の要所を大学院生のためにわかりやすく日本語で説明することを目ざして書きました．

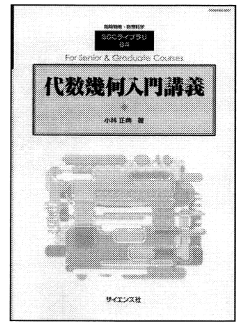
参考文献

1) H.E. Stanley, *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena* (Oxford, 1983).
2) L. Kadanoff, *Physics* **2** (1966) 263.
3) K.G. Wilson, 1982 年度ノーベル物理学賞講演. http://nobelprize.org/nobel_prizes/physics/
4) K.G. Wilson and J. Kogut, *Physics Reports* **C12** (1974) 75.
5) 園田英徳「素粒子論研究」109–5 (2004) 35.

（そのだ・ひでのり，神戸大学大学院理学研究科）

代数幾何入門講義

小林正典著，B5 判，184 頁，本体 1876 円，サイエンス社



本書は代数幾何の入門書であるが，その基礎を幅広く書いてあり，現代代数幾何を学ぶのに好適の本である．入門者のみならず，ある程度基礎知識をもつものにとっても座右にあると便利なものに仕上がっている．

カバーする範囲が広いにも関わらず，頁数は控えめで，極めて安い．本来は矛盾してしまいそうなこれらの要求をすべて満たすべく書かれている．まさに奇跡を実現した本である．該博な知識をもち，教育経験の豊富で実力十分な著者にして初めて本書ができたのであろう．

次のような点に留意して書いたそうである．

(1)　基本的な事項を飛ばさない．

(2)　内容を精選して基本的な内容をじっくり学べる．

(3)　標準的な定義・名称を用いる．

その結果，線形代数・微積分・集合・位相と，環と加群の初歩を学んだ段階ですぐに読み進められるし，基礎的な部分で論理構成に必要な命題の証明は，引用したり省略したり演習としたりすることはできるだけ避けてあるから，数学的理解力が十分あれば本書だけでかなりの部分がわかるはずである．

本書の目標はグロタンディック（Grothendieck）による概型の理論に読者を案内することであるが，著者は「概型の理論は抽象度がやや高いが，その険しさがかえって人を惹き付ける魅力でもある．」と述べているように，想定した読者の水準はかなり高そうである．

最初に，各章の表題を見てみよう．

第 1 章 ネーター環
第 2 章 アフィン代数多様体
第 3 章 アフィンスペクトル
第 4 章 Hom と $\otimes$，完全系列
第 5 章 圏と関手
第 6 章 層
第 7 章 概型
第 8 章 連接層
第 9 章 概型の射
第 10 章 代数多様体
第 11 章 アーベル圏
第 12 章 層係数コホモロジー
第 13 章 スペクトル系列

これからわかるように，本書は驚くほど内容豊富で魅力的である．13 章構成になっていることは Grothendieck の EGA（『代数幾何学原論』，“Élément de Géometrie Algébrique”）が全体で 13 章からなる予定であったことを想起させ，EGA を模しながらそれへの導入を 200 頁弱にまとめようとした著者の意図が透けて見える．

数学の本は難しい．基礎コースの本なら何とかこなせても大学院生用のテキストを完全に理解するのは至難の業である．著者が意図したように本書は予備知識が余りなくても分かるものになっているだろうか．検証のために「第 5 章 圏と関手」を例にとり詳しく見てみよう．

導入部では「集合の全体を集合と認めるわけにはいかない」ことを説明し，ラッセルの逆理に触れている．逆理を知らない読者には何のことか分からず，知っている読者には不要なことではないだろうか．次の言説

「また，同型ではあっても厳密にはものとして異なるかもしれない．同一性に触れずにそのまま取り扱いたいときもある．このようなときは圏と関手を用いて述べるのが便利である」

も理解が難しい．圏の定義では，まず

「1. ある対象（object）の範囲」

と書かれている．「範囲とは何？」と悩む読者もいるだろう．仕方がないから次に進むと

「2. 二つの対象 x, y に対して射（morphism）の集合 $\mathrm{Hom}(x, y)$ があり」

とある．対象を呑み込んだとしても「射は何だろう」と悩まされ読者には苦しいことが続く．適切な助言があれば何とか読み進むことができるだろう．しかしひとりで読んでいて分からないとき指示された参考書は Kashiwara・Shapira : Categories and Sheaves である．これは難解な本だから大変なことになりそうだ．

本書だけで代数幾何の精髄が分かるわけではないが，類書のない優れた入門書であることは確かである．

飯高　茂（学習院大学理学部）

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

鈴木 皇

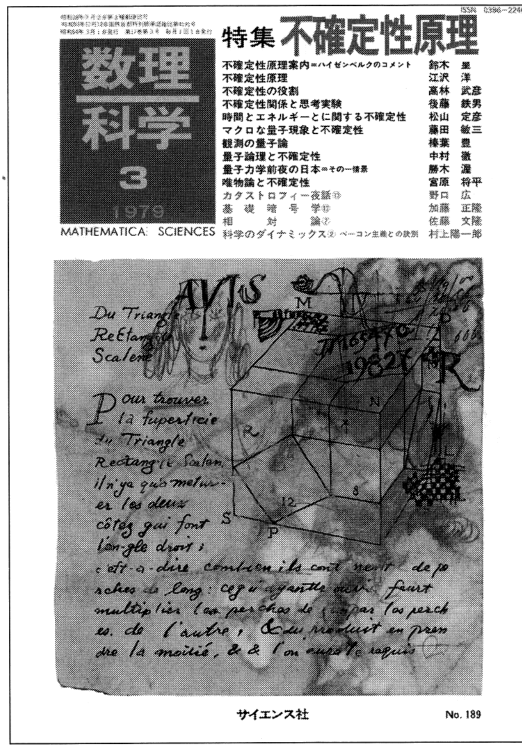
1979年3月号

[ノーベル賞 速報] 2008年10月8日 記． 昨夜の短いニュースにつづき，今日の朝刊に，南部・益川・小林三氏の楽しそうな顔写真が一面トップに大きく出ていた．低迷している日本にとっての朗報である．三人ともに日本人というのも，物理学的に適切であるが，嬉しい．つづいて，下村脩氏の化学賞．もう言うことはない．

湯川先生の時は，戦後で疲弊していた日本に希望をもたらし，物理を専攻しようという人たちが明らかに増えた．今回はどうだろう．政治は混迷し理科離れが憂慮されている．四人の受賞者は，みんな元気で楽しそうだし，「研究は楽しくなければ」とも言っている．四人の半分の国籍が米国なのも，仕方ないことだろう．四人ともスバラシイ人柄とお見受けする．面識がないから，失礼を顧みず，人物短評を述べる．

私は低エネルギー電子散乱が専門だったので，高エネルギーの事は全くわからない．しかし，南部さんの『クォーク』は旧新版とも精読して，さすがと感じた．独創性にあふれたオールマイティーの思考力との定評．南部さんの旧制第一高校理科甲類の同級生には秀れた物理学者になった人が多い．抜群の成績の南部さんをはじめとして，統計理論の富田和久，独特な思索家の小野健一，そのほか地球の磁気ダイナモ論の力武常次，統計理論の市嶋勲．船の造波抵抗を打ち消す乾崇夫の球形船首の発案は，もしあればノーベル工学賞は確実．

益川さんが英語が苦手でパスポートを持っていないというのには今の時代に驚き．クォーク クォーク と鳴いたのは北海の鳥で，命名の時から，何羽いたのか謎々にされていた．益川さんは，その数をフロで着想したとか，アルキメデス級である．賞など要らないと益川さんは言う．たしかに賞は純粋な探求心を損なう．賞は廃止したほうが良いと言う評論家（村上陽一郎）もいる．選考は人がするのだから適当でないこともある．今回も，明らかに遅かったと思う専門家は多いだろう．賞も，社会を明るくし若い人の励みになるなら可なり．



益川さんの自称天才的ヒラメキと小林さんの緻密な解析の名コンビも絶妙で，並ぶとユーモラスである．二人とも思考の指標とした，南部さんとの同時受賞を光栄とし南部さんも益川・小林理論をほめる．反目も絶無ではない競争の世界で，心が暖まる話である．

幸い，これで30年前の不確定性原理特集号について感想の原稿を書く余地がなくなった．不確定性原理は1926年に確定されたので新しいメッセージなどない．

懐かしい村松・安岡さんと編集した，この特集号は良くできている．強いて30年にコジつけるなら，南部さんの文化勲章と益川・小林の仁科賞は，いずれもほぼ30年前で，これこそ現代への激励のメッセージである．

（すずき・ただす）

問題例で深める物理 Problem Answer Discussion 第2回

古典力学と量子力学の対応

香取 眞理・中野 徹

量子力学では物体の位置は不確定であり，その確率分布を求めることができるだけである．これに対して，古典力学（ニュートン力学）は決定論的である．しかし古典力学でも，軌道上の微小区間ごとに物体の滞在時間を計算して，その滞在時間の分布を用いて周期運動の様子を記述することができる．「分布」という概念を横糸として，古典力学と量子力学の対応を考えてみたい．そのために1次元調和振動子の問題をいくつか解いてみよう．

2.1 単振動する質点の位置分布

質量 m の質点がバネ（バネ定数 k）によって図 2.1 のように平衡点の周りを単振動している．振幅を A，初期位相を θ_0 とすると，質点の位置は時刻 t の関数として

$$X(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \tag{2.1}$$

と表せる．このとき，この質点を（1次元）**調和振動子**と言う．これがニュートンの運動方程式 $F = ma$（ただし $F = -kX, a = d^2X/dt^2$）の解

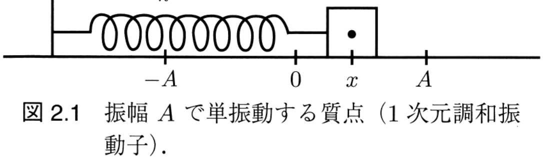


図 2.1　振幅 A で単振動する質点（1次元調和振動子）．

であることから，角振動数は $\omega = \sqrt{k/m}$ と定められる．よって，調和振動子の周期は $T = 2\pi/\omega$ である．

質点の運動エネルギー $K(t)$ と位置エネルギー $U(t)$ はともに周期 T の周期関数である．その増減は相補的であり，両者の和は常に一定である（**力学的エネルギー保存則**）：$\dot{X}(t) = dX(t)/dt$ として，

$$\begin{aligned} K(t) + U(t) &= \frac{1}{2}m\dot{X}(t)^2 + \frac{1}{2}kX(t)^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t + \theta_0) + \frac{1}{2}k\cos^2(\omega t + \theta_0) \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2A^2 \equiv E. \end{aligned} \tag{2.2}$$

それでは簡単な問題から始めてみよう．

> **問題 2.1**　調和振動子の運動エネルギーと位置エネルギーの時間平均をそれぞれ求めなさい．

解答　$X(t)$ とその時間微分 $\dot{X}(t)$ の関数 $Q = Q(X(t), \dot{X}(t))$ は周期 T の周期関数であり，その時間平均は

$$\langle Q \rangle_{\text{時間}} = \frac{1}{T}\int_0^T Q(X(t), \dot{X}(t))dt$$

で与えられる．したがって

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_{\text{時間}} &= \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{m\omega^2A^2}{2}\sin^2(\omega t + \theta_0)dt \\ &= \frac{m\omega^3A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega} \frac{1}{2}\Big\{1 - \cos 2(\omega t + \theta_0)\Big\}dt \\ &= \frac{m\omega^2A^2}{4}, \end{aligned}$$

$$\langle U\rangle_{\text{時間}} = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega t+\theta_0)dt$$
$$= \frac{k\omega A^2}{4\pi}\int_0^{2\pi/\omega}\frac{1}{2}\Big\{1+\cos 2(\omega t+\theta_0)\Big\}dt$$
$$= \frac{kA^2}{4}. \tag{2.3}$$

つまり $\langle K\rangle_{\text{時間}} = \langle U\rangle_{\text{時間}} = E/2$ である． ■

$U(t) = kX(t)^2/2$ なので，(2.3) 式は

$$\langle X^2\rangle_{\text{時間}} = \frac{A^2}{2} \tag{2.4}$$

ということである．振幅が A なので当然 $-A \le X(t) \le A$ である．単振動なので，質点の運動は平衡点を通過するとき最速であり，最小値 $-A$ と最大値 A をとるとき一瞬静止する．（運動の向きが逆になるときには，速さ=0 にならなければならない．$X=-A$ の点と $X=A$ の点を**転回点**と言う．）質点は振動の中心 $X=0$ 付近よりも振動の両端 $X=\pm A$ 付近にいることのほうが多いということである．

> **問題 2.2**　1 周期の内で調和振動子の位置が $x \le X(t) \le x+\Delta x$ である割合は，$0<\Delta x \ll 1$ のとき，ある関数 $p(x)$ を用いて
>
> $$p(x)\Delta x + \mathcal{O}((\Delta x)^2) \tag{2.5}$$
>
> という形に書ける．このことを $p(x)$ を具体的に求めることによって示しなさい．

注　$\mathcal{O}((\Delta x)^2)$ は $(\Delta x)^2$ 以下のオーダーの微小量を表す．

解答　$X(t) \in [x, x+\Delta x]$ である割合を $P(x \le X \le x+\Delta x)$ と書くことにする．いま $-A \le x < A, 0 < \Delta x \ll 1$ とする．図 2.2 を見れば分かるように，$x \le X(t) \le x+\Delta x$ となるのは 1 周期 T の内で太線で示した 2 つの時間区間のときなので

$$P(x \le X \le x+\Delta x) = 2\frac{\tau-\tau'}{T} = \frac{\omega}{\pi}(\tau-\tau') \tag{2.6}$$

である．ただし，(2.1) 式より

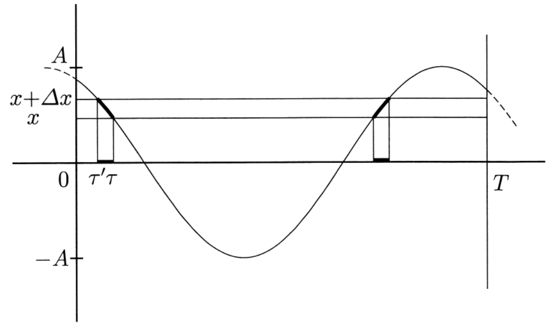


図 2.2　1 周期 T の内で $x \le X(t) \le x+\Delta x$ となる割合．

$$\tau = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{x}{A} - \frac{\theta_0}{\omega},$$
$$\tau' = \frac{1}{\omega}\arccos\frac{x+\Delta x}{A} - \frac{\theta_0}{\omega}$$

である．$\arccos y$ の値が第 1, 2 象限にあるときは $d(\arccos y)/dy = -1/\sqrt{1-y^2}$ なので

$$\tau-\tau' = -\frac{1}{\omega}\frac{d}{dy}\arccos y\bigg|_{y=x/A}\frac{\Delta x}{A} + \mathcal{O}((\Delta x)^2)$$
$$= \frac{1}{\omega}\frac{1}{\sqrt{1-(x/A)^2}}\frac{\Delta x}{A} + \mathcal{O}((\Delta x)^2).$$

これを (2.6) 式に代入すると，(2.5) 式が

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{A^2-x^2}} & (|x| \le A), \\ 0 & (|x| > A) \end{cases} \tag{2.7}$$

として成り立つことが分かる． ■

別解　$X(t) = x$ であるときの質点の速さ $v(x) = |\dot{X}(t)|\Big|_{X(t)=x}$ は

$$v(x) = |-\omega A\sin(\omega t+\theta_0)|\Big|_{X(t)=x}$$
$$= \omega A\sqrt{1-(x/A)^2}. \tag{2.8}$$

$X(t)$ が区間 $[x, x+\Delta x]$ 内に滞在する時間 Δt は，その区間を通過する速さに反比例して $\Delta t = 2\Delta x/v(x)$ で与えられる．$p(x)\Delta x = \Delta t/T$ であるから，(2.5) 式および (2.7) 式が得られる． ■

関数 $p(x)$ は調和振動子の位置分布の密度関数である．これをプロットすると図 2.3 のようになる．中心（平衡点）$x=0$ に対して左右対称であ

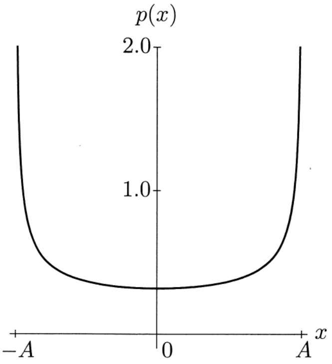


図 2.3　古典力学における調和振動子の位置分布の密度関数.

る（偶関数）. $x = 0$ で最小値 $1/(\pi A)$ をとり, $x \to \pm A$（転回点）で発散する.

2.2 モーメントと特性関数

x の関数 $Q(x)$ を, 問題 2.2 で求めた分布関数 $p(x)$ に渡って平均したものを

$$\langle Q \rangle_{\text{分布}} = \int_{-\infty}^{\infty} Q(x)p(x)dx \tag{2.9}$$

と書くことにする. (2.7) 式で与えられる密度関数は $|x| > A$ のときは零なので, (2.9) の積分区間は実際には $[-A, A]$ である. $p(x)$ は x の偶関数であるので, その平均値は零である. 調和振動子は平衡点の周りを左右対称に振動するから, このことは当然である：

$$\langle X \rangle_{\text{時間}} = \langle x \rangle_{\text{分布}} = 0. \tag{2.10}$$

これに対して, (2.4) 式で見たように

$$\langle X^2 \rangle_{\text{時間}} = \langle x^2 \rangle_{\text{分布}} = \frac{A^2}{2} \tag{2.11}$$

である. この量は **2 次モーメント**と呼ばれる. 一般に $\langle x^k \rangle$ を k-次モーメントと言う.

問題 2.3　任意の実解析関数 Q に対して

$$\langle Q \rangle_{\text{時間}} = \langle Q \rangle_{\text{分布}} \tag{2.12}$$

が成り立つことを証明しなさい.

解答　$Q(x)$ が x の奇関数の場合は, (2.12) 式の両辺はともに零なので等式は明らかに成り立つ. よって, $Q(x)$ は x の偶関数であり $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n}x^{2n}$ と原点の周りでテイラー展開できる場合を考えればよい. したがって, 任意の自然数 $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$\langle X^{2n} \rangle_{\text{時間}} = \langle x^{2n} \rangle_{\text{分布}} \tag{2.13}$$

が成り立つことを示せばよい. (2.1) 式を用いれば

$$(\text{左辺}) = \frac{\omega}{2\pi}\int_0^{2\pi/\omega} A^{2n}\cos^{2n}(\omega t + \theta_0)dt.$$

$\omega t + \theta_0 = \theta$ によって積分変数を t から θ に変換する. 一方 (2.7) 式を用いれば

$$(\text{右辺}) = \int_{-A}^{A} \frac{x^{2n}}{\pi\sqrt{A^2 - x^2}}dx.$$

$x = A\cos\theta$ と変数変換すると, ともに $A^{2n}I_n$ となる. ただし

$$I_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2n}\theta d\theta \tag{2.14}$$

である. 以上で等式 (2.12) が証明されたことになる. ■

ついでに積分 (2.14) を計算して, (2.13) の値を求めておこう. $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ なので

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2(n-1)}\theta\,(1 - \sin^2\theta)d\theta \\ &= I_{n-1} - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2(n-1)}\theta\sin^2\theta d\theta \end{aligned} \tag{2.15}$$

であるが,

$$\cos^{2(n-1)}\theta\sin\theta = -\frac{1}{2n-1}\frac{d}{d\theta}\cos^{2n-1}\theta$$

であることに注意すれば, 部分積分により (2.15) 式の最右辺の第 2 項は $-I_n/(2n-1)$ であることが分かる. したがって

$$I_n = \frac{2n-1}{2n}I_{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

という漸化式が得られる. これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{(2n-1)\cdot(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)\cdot(2n-2)\cdots 2}I_0 \\ &= \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}I_0 \end{aligned}$$

を得るが, $I_0 = 1$ なので, (2.13) 式の値は

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}A^{2n} \tag{2.16}$$

と定まる．（特に $n=1$ とおけば，$2!A^2/2^2 = A^2/2$ となり，(2.11) 式が得られる．）

θ を実パラメータとして，分布平均の式 (2.9) で特に $Q(x)=e^{i\theta x}$ としてみよう（$i=\sqrt{-1}$）．このとき得られる

$$\langle e^{i\theta x}\rangle_{\text{分布}} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)e^{i\theta x}dx$$

は，位置分布の密度関数 $p(x)$ のフーリエ変換に他ならない．ところが，右辺の積分の中の $e^{i\theta x}$ を $x=0$ の周りでテイラー展開すると

$$\langle e^{i\theta x}\rangle_{\text{分布}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(i\theta)^k}{k!}\langle x^k\rangle_{\text{分布}}$$

を得るので，これはモーメント $\langle x^k\rangle_{\text{分布}}$ の**母関数**の役割を果たすことが分かる．このため，分布の密度関数のフーリエ変換は特に**特性関数**と呼ばれる．さて，$\langle x^{2n}\rangle_{\text{分布}}$ $(n=0,1,2,\cdots)$ の値は (2.16) 式で与えられ，また $\langle x^{2n+1}\rangle_{\text{分布}}=0$ $(n=0,1,2,\cdots)$ であるので，この特性関数は

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{A\theta}{2}\right)^{2n}$$

という交代級数として定められる．これは，**ベッセル関数**

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\Gamma(\nu+n+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

で $\nu=0, z=A\theta$ としたものに等しい．（ガンマ関数 $\Gamma(z)=\int_0^{\infty}e^{-s}s^{z-1}ds$ で $z=n+1=1,2,3,\cdots$ のときは $\Gamma(n+1)=n!$ である．）

2.3 調和振動子の量子力学的描像

調和振動子を量子力学的に記述するにはシュレーディンガー方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(x,t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}+V(x)\right]\Psi(x,t) \tag{2.17}$$

を解いて波動関数 $\Psi(x,t)$ を求めればよい．ここで $\hbar$ はプランク定数 $h=6.626\cdots\times10^{-34}$ [Js] を 2π で割った物理定数である．また，$V(x)$ はバネの復元力 $F=-kx=-m\omega^2x$ に対応するポテンシャル $V(x)=m\omega^2x^2/2$ である．波動関数が求まれば，位置の分布は

$$P(x\le X(t)\le x+\Delta x) = |\Psi(x,t)|^2\Delta x+\mathcal{O}((\Delta x)^2)$$

と定まる．E を実数として $\Psi(x,t)=u(x)e^{-iEt/\hbar}$ とおくと，$|\Psi(x,t)|^2 = (u(x)e^{-iEt/\hbar})\times\overline{(u(x)\times e^{iEt/\hbar})} = |u(x)|^2$ となるので（複素数 z に対してその複素共役を $\bar{z}$ と記す），定常分布の確率密度関数が求められるはずである．もちろん確率密度であるためには，$\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^2dx=1$ でなければならない．つまり $u(x)$ は，$x\to\pm\infty$ で十分はやく零にならなければならない．以上のことから，E と $u(x)$ は，(2.17) 式の右辺の演算子（ハミルトニアン）の固有値問題の解として与えられることが分かる．解は可算無限個ある．固有値（エネルギー準位）は離散的であり

$$E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad n=0,1,2,\cdots \tag{2.18}$$

で与えられる．対応するエネルギー固有関数は，

$$u_n(x) = \frac{1}{\sqrt{x_0}}\varphi_n\left(\frac{x}{x_0}\right) \tag{2.19}$$

である．ここで $x_0=\sqrt{\hbar/(m\omega)}$ であり，

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{h_n}}H_n(z)e^{-z^2/2}$$

である．ただし，$h_n=\sqrt{\pi}2^n n!$ であり，$H_n(z)$ は**エルミート多項式**

$$H_n(z) = n!\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2z)^{n-2k}}{k!(n-2k)!}$$

である（$[a]$ は a を超えない最大の整数）．$\{\varphi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ は正規直交関数系を成す．エネルギーが $E=E_n$ の固有状態にある調和振動子の位置の確率密度関数を p_n と書くことにする．

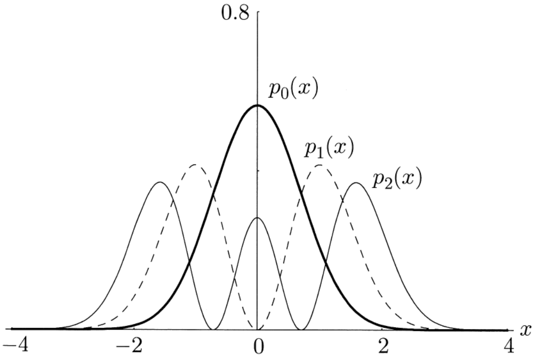


図 2.4　エネルギー準位 $n=0,1,2$ の固有状態にある調和振動子の位置分布の確率密度関数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$.

問題 2.4　$p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ を具体的に書き下しなさい．そして，その概略をグラフに描きなさい．

略解　$h_0=\sqrt{\pi}$, $h_1=2\sqrt{\pi}$, $h_2=8\sqrt{\pi}$, $H_0(z)=1$, $H_1(z)=2z$, $H_2(z)=4z^2-2$ をそれぞれ

$$p_n(x)=\frac{1}{x_0h_n}\left\{H_n\left(\frac{x}{x_0}\right)\right\}^2 e^{-(x/x_0)^2}$$

に代入すればよい． ■

図 2.4 は $x_0=1$ として，3 つの確率密度関数 $p_n(x), n=0,1,2$ を重ねてプロットしたものである．

2.4 量子古典対応

図 2.4 を見ると，量子力学的な位置分布は古典力学（ニュートン力学）で求めた分布（図 2.3）とは似ても似つかない．しかしこれは当然である．図 2.4 に示したのは，エネルギーの値が $\hbar$ と同じく 10^{-34} のオーダーというとても小さな値である場合だからである．エネルギーは振幅の 2 乗に比例するという関係式 (2.2) を用いると，振幅も $A\fallingdotseq 0$ ということである．つまり，古典力学的に考えれば質点は平衡点にほぼ静止しているという状況である．ただ，**ハイゼンベルクの不確定性原理**があるので，質点は $x=0$ という一点に静止していることはできず，位置の分布がわずかに広がるのである．

それではエネルギー準位が上がり，振幅が大きくなっていったらどうなるのであろうか．(2.2) 式と (2.18) 式より

$$\frac{1}{2}m\omega^2A_n^2=\hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$$

とおくと，$A_n=x_0\sqrt{2n+1}$ となる（x_0 は (2.19) 式で用いた定数）．これを用いると $x/x_0=x\sqrt{2n+1}/A_n$ となるので，(2.19) 式より

$$\begin{aligned}p_n(x)&=|u_n(x)|^2\\&=\frac{\sqrt{2n+1}}{A_n}\left\{\varphi_n\left(\sqrt{2n+1}\frac{x}{A_n}\right)\right\}^2\end{aligned}$$

と書ける．

振幅を $A_n=A=$ 一定として，エネルギー準位 $n\to\infty$ の極限をとることを考えてみよう．「量子数が大きくなる極限（あるいは $\hbar\to 0$ の極限）で量子論は古典論に移行する」という**ボーアの対応原理**を単純に適用すると，この極限で $p_n(x)$ は問題 2.2 で求めた古典力学的な位置の密度関数 (2.7) に収束することが予想される．これが正しいとすると，$|x|<A$ のとき，エルミートの正規直交関数 φ_n に対して

$$\left\{\varphi_n\left(\sqrt{2n+1}\frac{x}{A}\right)\right\}^2\overset{?}{\simeq}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-(x/A)^2}},\quad n\to\infty \qquad (2.20)$$

という極限定理が成り立つことになる．

図 2.5 と図 2.6 に，$p_n(x)$ を $n=10$ と $n=20$ に対してそれぞれプロットした．一般に $p_n(x)$ は $n+1$ 個のピークと n 個の零点をもつ．つまり，n が大きくなればなるほど，$p_n(x)$ のグラフは激しく上下する．ある関数に収束することは決してない．したがって，(2.20) 式は間違いである．しかしながら，図 2.5 と図 2.6 で $p_n(x)$ の激しい振動を均して見てみると，古典力学の結果 (2.7) と同じ（逆さ釣鐘状の）曲線が得られるではないか．

この不思議な挙動は，**漸近解析**という方法[1)]によって調べることができる．その結果によると，(2.20) 式は正しくは

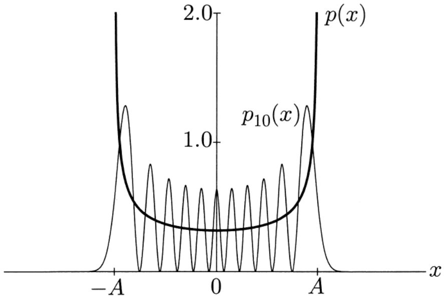


図 2.5　確率密度関数 $p_{10}(x)$ と古典力学的な位置分布の密度関数 $p(x)$ との比較.

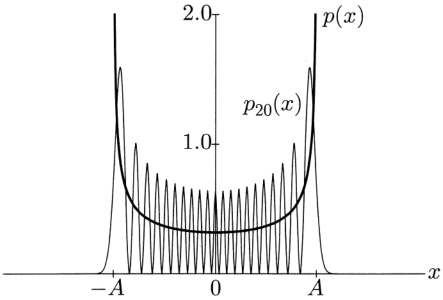


図 2.6　確率密度関数 $p_{20}(x)$ と古典力学的な位置分布の密度関数 $p(x)$ との比較.

$$\left\{\varphi_n\left(\sqrt{2n+1}\frac{x}{A}\right)\right\}^2 \simeq \sqrt{\frac{2}{n}}\frac{1}{\pi\sqrt{1-(x/A)^2}} \times \cos^2\left\{\Theta_n\left(\frac{x}{A}\right)+\frac{n\pi}{2}\right\},\quad n\to\infty$$

である．ただしここで

$$\Theta_n(z) = \frac{2n+1}{2}\left(z\sqrt{1-z^2}+\arcsin z\right)$$

である．$n\to\infty$ で $\Theta_n(x/A)+n\pi/2 \propto n\to\infty$ であるから，図 2.5 や図 2.6 に見られる激しい上下振動は $\cos^2\{\Theta_n(x/A)+n\pi/2\}$ の因子によることが分かる．この部分を，第 2.1 節の古典論のところで行った時間平均の計算のように積分して均してしまい，1/2 で置き換えてしまうと得られるのが (2.20) 式なのである．さらに注意すべきことは

$$\Theta_n\left(\frac{x}{A_n}\right) = \int_0^x \frac{mv_n(x')}{\hbar}dx'$$

と書けることである．ここで v_n は (2.8) 式で $A = A_n = x_0\sqrt{2n+1}$ としたものである．つまり $v_n(x')$ は，振幅が A_n の古典力学的な調和振動子の，位置 x' での速さを表す．それに質量 m をかければ運動量 p_n となるので，さらにそれを $\hbar$ で割って得られる被積分関数は，**ド・ブロイ波**の波数 $k_n = p_n/\hbar$ である．

第 2.3 節では定常分布を議論するためにエネルギー固有状態を考えた．エネルギーの正準共役な変数は時間であるので，対応する古典的な運動の記述は，時間平均されたもの（第 2.1 節で求めたもの）となるのである（**ボーアの相補性原理**）．

量子力学の問題を解く際に，古典力学との対応を強く意識すると，量子力学の原理が浮き彫りになってくる．

参考文献

1)　江沢洋：『漸近解析』，岩波講座 応用数学 [方法 5]，岩波書店 (1995).

（かとり・まこと，中央大学理工学部）
（なかの・とおる，中央大学理工学部）



数学の道しるべ
～研究者の道とは何か～
第6回

偶然の連続

斎藤　恭司

編集部から与えられた題目は「私は如何にして数学者になったか」であったように記憶する．これに正面きって答えるのは難しい．それは，自分の裸を人前に晒すようで気恥ずかしい．読者としても筆者が思い入れ込めて語れば語るほど身を引いて「はあ，そうですか」と言うのが落ちであろう．人の記憶は都合良くできていて，本人に都合の良いことが美化された形で残っているのではないか．記憶当時感じた生の思いは今更復元の仕様がない．にも関わらず，今回はその編集部からのお誘いに乗って，思い出すままに昔のことを書き留めてみようかと思う．記憶にあるということはそのことが本人にとって何らかの重要な意味があったことのはずだから．従って，これから書くことは読者のためというよりむしろ僕自身のための備忘録みたいな物だろう．よって一人称は客観的な“私”ではなく主観的な“僕”を採用することにした[*1)]．

1. クニちゃん（就学前）

後でも書くように，僕が数学者になる道を最終的に選んだ時期は判然としない．迷いをふっ切り数学科に進学したのも友人に後押しされた所もある．とはいえ，子供の頃から算数が，長じてからは数学が好きであった．記憶をたどると，学校入学より遥か以前に近所のクニちゃんと裏庭でおままごとをしていたとき「このお豆腐を半分に切（って並べ）ると倍の大きさ（面積）になるでしょ．それをまた（水平に）半分に切るとまた倍になって，それをまた半分に切って，切って，切って…．すると，何よりも大きくなっちゃうんだよ．」等と言って「恭ちゃんは理屈っぽい！」と呆れられたことを思い出す．思うに子供は人が思っている以上に生まれながらにして抽象的世界に住んでいて，その思考の枠が“現実”の縛りを受けるのは後になって経験を積んでからなのかもしれない．もしかしたら，数学者とはその様な自由な思考法を大人になるまで残した人々なのかもしれない．

2. 筆宝元子先生（小学校）

本当に算数が好きになったのは小学校に入ってからである．担任の筆宝元子先生が算数の先生だったからである．黒板に丸い円を描きながら「私の（数学の）先生はビシッと真ん丸を描くのよ」等と言われるのを「フーン，丸く描くってそんなに大事なのかな，先生のほうがもっと丸いのに」等と思いながら聞いていた．僕はこの先生が大好きだったので先生の好きな算数も好きになった．でもそ

---

*1）　この稿は 2008 年秋，京都と東京の往復の新幹線の中で何回か書いたものをまとめた物です．話が断片的で所々飛躍をするのはお許し下さい．

れではなぜ先生を好きになったのだろう．更に記憶を辿っていくと小学校に入って最初か二番め位の授業風景を思い出す．先生は教室の前のほうから自分のほうを一生懸命見つめている子供たちに向かって「はーい，こっちの手を挙げてー，はーい，今度はこっちの手を挙げてー．」等と言いながら左右の手を交互に挙げていた．それを見て子供たちは皆我先に「はーい，はーい」と手を挙げる．何しろ初めの頃の授業なので親の参観等もあって子供も張り切っている．それを見ていて，僕は一寸考えた後，毎回皆とは反対側の手を挙げた．それを目聡く見つけた先生は「おや，君はどうして反対の手を挙げているの．」と聞いてきた．僕は立ち上がって「だって先生はこっちを向いているでしょ．だから，こうやって…」とくるりと向きを変えて先生と同じ向きに立つと，僕の挙げていた手はちょうど先生の挙げていた手の向きとピタと重なった．先生が驚かれたことは覚えているが何を言われたかは記憶にない．それでもこのときのことが小学校最初の頃の楽しい思い出として残っている所を見ると，お咎めはなく，先生は何か楽しいことを言ってくれたに違いない．

3. 応用問題

小学校も高学年になると担任は図工の熊谷先生になった．先生は生徒が放課後残って自主活動をするのを積極的に支援してくれたが，その一つに，算数の“難しい”応用問題を数問黒板に書き，後は残った生徒に好きにやらせておくと言うのがあった．この応用問題と言うのは昔の和算で言う所の鶴亀算とか植木算とかそれらを組み合わせた複合した結構ややこしく考える必要な問題とかであったが，僕はそれが好きで結構良く居残った．するとクラスの中でも塾に行っている（当時は慶應中学を受ける子等せいぜい数人位しか塾に行っていなかったが）エリートたちが残って，ワイワイ解説する．僕はそんなことは知らない（習ったことはない）が，こいつらに負けるものかとがんばった．別に彼らと仲悪かったわけでもなく，よく休み時間などに「こんな問題があるんだ」と塾で出た難問（大抵は三角，四角と円弧を組み合わせて描かれた図形の求積問題等）を見せられては自分なりに考えて答えをだして，時には「さすがは斎藤博士」等とおだてられていい気になっていた．

とはいえ僕は学校ではむしろのろまでいつも涎を垂らしてぼっとしているので牛と呼ばれていた．だからクラスの中でもいつも蒼っ鼻を垂らしていたO君，放課後残っての理科の実験で電極を金鎚でショートさせて火花を飛び散らしたS君，乱暴者でクラスから後ろ指さされていたY君等（要するに現在言う所の落ちこぼれたち）とちんちんが腫れるという噂を確認するためにミミズに小便を掛けたり（Y君は本当に腫れたと言っていたが…），山芋蔓に張りついている巨大な芋虫を棒で叩き落としたりして遊んでいた．その芋虫が棒に跳ねられて僕の半ズボンの中に飛び込んできた夜は僕は寝ている間に巨大芋虫に変身するのではないかと恐怖だった．このY君はよく泣き虫のOをおちょくってちょっかいをだした．するとOは泣きながら怒って手を突き出しながらYを追いかける．そうやって二人して，教室をぐるぐる回りしているうちにドアの窓ガラスを突き破ってしまった．そんなOではあるが，よく校庭で一人ぼんやりしている僕を見つけては「斎藤くん」とか言って寄ってくるのであった．天神町を抜けて駅前の倉庫の近くにある彼の家にも時々遊びに行った．

4. T.Y. 君

Y君については忘れ難い思い出がある．本稿のテーマには合わないかもしれないが，此処に書き留めておくのをお許し下さい．そもそも，Y君は転校生だった．先生が彼の名前，徳次郎を黒板に大書きして，この字はこんなにいい意味があるのですよと言う解説を聞き，逆に子供心ながら，ああこの子は問題児なのだなと分かった．早稲田通りから天神町に抜ける道の角にある八百屋が彼の家だった．低い木箱の上に雑然と野菜が並んでいたが，その裏手のごみごみと箱を積み上げてある所が住処だった．恐らく箱の上にボロでテントを張るようにして暮らしていたのであろう，中には

入れてくれなかった．当時日本全体が貧しかったとはいえ，彼の所は特別だった．体重測定でも彼はパンツを穿いていなく何か古ズボンみたいな物を短く切って穿いていた．そんな彼とも中学でまたクラスが同じになった．クラスでは相変わらず乱暴者で問題児扱いだった（隣に座るのが嫌とか言う子が続出してクラス会で大騒ぎになる等）にも係わらず，僕等は弁当を分けたりして結構仲よくしていた．僕が保健の授業で気味悪い病気の話を聞いて脳貧血を起こしてぶったおれて保健室に担ぎ込まれたときも（あの今までノートも取ったことがない）Ｙが拙いノートを一生懸命保健室に届けてくれた．このＹがあるとき僕の家に遊びにきた．裏庭で何かごそごそしていたとき，唐突にそこらに落ちていた茶色い植木鉢のかけらを僕に渡しながら「(俺はダメだけど）これをやるから，斎藤くんは勉強して偉くなれよ」と言った．長いこと僕はそのかけらを大切に取っておいたがその後の何度かの引越しの混乱の中で無くしてしまった．しかし，いまでもこの思い出は僕を押し上げる力となっている．Ｙとは僕が高校に入った後一度，中野駅北口の繁華街（狸小路）でばったり会った．夕方で僕は高校帰りだったが，Ｙは赤青の原色のはでなシャツを着ながらチンピラ仲間2, 3人と連れだって歩いていた．目聡く僕を見つけると「よお！　斎藤くん元気？」と声を掛けてきた．そのときはかつての問題児の蔭はなく明るく楽しそうだった．それにしても傍目には真っ黒い制服の僕と派手なシャツのお兄さんとの取り合わせは不思議な物に見えたことであろう．その後僕は彼が新宿の組員になって家を出たという噂を聞いたが2度と会っていない．

5. 植物採集

話を戻すと，この頃の僕の関心は数学よりも植物にあった．小学校に入った頃から僕の愛読書は若き牧野富太郎著の『日本植物図鑑』だった．厭きもせずページを繰ってはその細密な描写を眺めて時を過ごしていた．休日や夏休みには植物採集のために東京中野付近を随分歩き回っては標本を作っていた．近くの新井薬師の池にもエビカニがいたり（先生が子供の頃は泳げたそうであるが）妙正寺川の土手では縄文土器が出土し，落合の高台には縦穴住居が復元されていた．その辺りを探検に行き，付近の林の日当たりのよい辺で見つけた白い小さな花は『牧野植物図鑑』をいくらひっくり返しそれまでの知識を総動員しても名前は見付からなかった．当時は新しい発見か否かを確認するには更に専門的文献を探索したり，専門家の意見を聞く等の学問の方法に全くの無知であった僕は結局その標本を放置したままで，その同定は曖昧になってしまった．今でも気がかりではあるが，そんな人家近くの繁みで新発見等あるまいと思うばかりである．今は，その落合にあった遠く富士山まで見はるかせた高台も木立も縄文住居跡も完全に家に覆われてしまって痕跡も残っていない．

6. 塩田五郎先生（中学）

数学について言うと僕の中学一年の担任の塩田先生が数学であった．恐い先生で昔は生徒をぶん殴ったりしたという噂も有ったが，僕はこの先生の授業が大好きであった．先生はいつも大きな定規を持ち歩いていたが，さっそうとその定規を用いながら簡単なユークリッドの公理系から三角形の合同条件を出して次々と新事実を証明していく先生の授業に目を見張った．証明がこんなに面白いものとは！　その先生がビシッとしていたのが気に入っていたのであろうか，Ｙはこの先生に不思議となついたのである．毎朝，ホームルームが終わって教室を去り階段を降りていく先生を僕とＹとは一緒に教室後ろの戸を開けて見送り，Ｙが「忠治, 忠治！」と呼びかけると*2) 先生は階段の踊り場からこちらを見上げてニカッと笑うのが常であった．あの恐い先生が一瞬だけ表情を崩して笑われる．それは僕等に取っても楽しい一瞬であった．

---

*2)　忠治とは赤城山に籠ったが結局役人に敗れ張り付けになった博徒国定忠治のこと．なぜ僕等が先生にこのあだ名を付けたのか忘れてしまった．当時の映画に出てきた俳優市川雷蔵の忠治と先生のそのギロッとした迫力ある風貌とが似ていたからか？　匕首を片手に赤子を背負い「赤城の山も今宵限り」と決めセリフを言う忠治の姿にもらい泣きしたものである．

7. 人は何のため生きるのか

高校に入るともう一つ忙しいことが加わった．僕は放送部に入ったのである．放送部は大体技術畑の人間かアナウンサ側の人間かに分かれるが，僕自身はそのどちらでもなく，放課後放送部の部室にいて人とだべっているか，一人で古いレコード，台本を片っ端からチェックしているかであった．そうしているうちに，高校に入ったときは学年トップクラスに居た成績は半年もしないうちに学年最下位グループに移行してしまった．高校に入ってから教科書もろくに見ないものだから，数学もさっぱり分からない．それまでの「俺は数学ができるんだ」と言う鼻っ柱はいとも簡単に打ち砕かれてしまった．しかし，そんなことより何より，人が生きている目的は何なのかという疑問に取り憑かれてしまった．これは熱病のように僕を苦しめた．級友等が幸福の追求等と言っているのを横で聞きながら「生きている目的も分からないで何を抜かすか…」と一人胸のうちでつぶやいていた．それまで面白いと思ってたことも無目的でつまらなく見え出した．時間のことを考えるとわけがわからなくなった．ニュートン力学によると，現在思い悩んでいる自分も宇宙の開闢以来予定されていたことになる．まるで幼い子が「お母さん，お母さんは僕が生まれることを知っていたんだね.」と言ってるみたいだ．むしろ世界史のS先生が授業開講冒頭に「私も若い頃は人並に人生に思い悩みまして，それで世界史を勉強してみようと思いました.」と言われるのにはっとしたのである．授業でも古典を読む古文や漢文の時間は面白かった．だが，論語の孔子は人間像としては強烈だが我々の生きて在る世界が在る理由については何も述べて居らず僕の心には響いてこなかった．むしろ聖書ヨハネ伝の中での言葉と世界との関係についてふれたいくつかの言葉は心に響いたが，それでも神という存在は不可解だった．その中で一番心に響いたのはいくつかの仏典だった*3)．今でも真実を求める仏弟子のシャーリプトラに釈迦が語ったとされる「舎利子．色不異空．空不異色．色即是空．空即是色．受想行識．亦復如是．舎利子．是諸法空想．…（鳩摩羅汁漢訳般若心教より）」と言う言葉の原典を求めて西域インドに旅立った三蔵法師や，ヒマラヤ，チベットを越えて行った明治の仏僧河口慧海の旅に心惹かれる．その真実を求める思いに胸が熱くなる．

8. 岡田信吉先生（高校）

数学の教師の中に一人変わった先生が居られた．岡田先生と言うその方はいつも坊主頭で，年齢不詳ながら，顔じゅう皺だらけだったので「皺ちゃん」と呼ばれていた．ギョロッとした目にいつも困ったような悲しげな表情を浮かべていて，一寸たどたどしい不器用な話し方をされた（若い頃有名女優との大恋愛に敗れ以来坊主頭になったという噂があった）．僕には先生はとてつもなく偉く見えた．そんな先生が当時日本ではマイナーなスポーツであったサッカー部顧問をして，いつも腰手ぬぐいの質素な姿をされていた．僕がグラウンドの縁で何か試合でも見ているといつの間にか隣に皺ちゃんが来ていて，ぼそぼそっと独り言なのか僕に話しかけたのかよくわからないコメントをされたことがあった．「何故クラスも異なる僕に…？」と僕はどぎまぎした．高二になり岡田先生の授業を受けるようになったが，三角関数の加法公式もさっぱり分からない．テストも全く手が付けられず，白紙のままの答案を提出した．それが，テストが帰ってきて驚いたことに5点だか点が付いている．よく見ると，白紙で出したと思った答案も一箇所問題の式を引き写し書いた所があった．どうもそれに対して（或いはそれを口実に）点を出したようである．何で点が付いたのだろうか．単純に，落第させると後がややこしいと言う事状でもあったのか．それとも…？ いずれにせよ僕は皺ちゃんの「君ならばやればできる」と言う励ましの言葉を聞いた様な気がした．これを機に僕はま

*3) ヨハネ伝は福音書の中で後期に書かれてむしろ仏教に近いグノーシス派に近いのだそうである．そのグノーシスは理性的（狂信的でない）が故に紀元後の反キリスト教的時代の奔流の中で抹殺されて，二次大戦後エジプトのどこかの畑から出土した大きな瓶の中から出てきた経典により初めてその姿が復元されるようになったと聞く．

た勉強を始める決心をしたのである．

9. 親の力

もう一つ，そんな僕を立ち直らせたものに親の力，特に母親の一途な思いがあったことを挙げねばならない．今でこそそのときのことをこの様に客観的に書けるが，長いこと恥ずかしくて人に話せなかった．母があるとき「そんなに放送部が忙しいというなら，私が毎日迎えにいきます.」と言って，毎日授業の終わった頃に中野の家から一時間近く掛けて西荻窪にある高校まで迎えに来るようになったのである．これはある意味で僕にとっては屈辱でもあった．僕は自分で自分をコントロールできないことを意味もしていたのだから．一方放送部室で毎日遅くまで一人で残って作業しているのに倦み出していた僕にとっては渡りに船でもあった．しかしそんなことさえ親の力を借りなければ決断できない自分が情けなくもあった．とはいえ，迎えにきた母と一緒に駅まで歩く20分ほどの道のりは何故か心楽しいものであった．会話は単に道すがらの家々の庭に咲く季節の花のことであったり他愛のないことであったように思う．でも折々に美しい花を見せるこれらの草や木は何を目的として生きているのだろう？ もしやして，目的は見えなくても生きてありつづけることに何か意味があるのだろうか？ この時受け取った母の言葉にならないまっすぐな思いがその後の僕の支えになっているのは間違いない．

ここで僕が幼かった頃の親のことを少し書いておきたい．父は山形県米澤市の人で東北大で有機化学を学び北大で助教授までやったようであるが，研究室の教授との間で研究上のいざこざがあったようで，研究室を飛び出し東京に出て三菱化成工業の研究所で人工甘味料を研究していた．此処までは僕の生まれる以前の話である．僕が生まれたのは第一回の東京大空襲の直後の1944年12月25日東京中野桃園町にあった山田病院である．母は空襲の際もベッドを起き出して窓から真っ赤に燃え上がる東京の夜空を見ていたようで，看護婦さんに妊婦はこんなものを見ては行けないと慌てて部屋に連れ戻されたとある．火は中野の城山公園までで止まり，家のあった千光前町は無事であった．僕が子供の頃には近所のおばさんから「焼夷弾がこんな風にバラバラ降ってきたんだよ.」とか「窓ガラスがバラバラと焼け落ちてね…」とか言う話を耳に蛸ができるくらい聞かされた（今でもイラクなどで人家のある地域への爆撃が続いている話等を聞くと胸が痛む）．妊婦では疎開できなかったのを，僕の首が座った2カ月後に母親と3人の子供だけ父の田舎の米澤に疎開しそこで1年間過ごしたのである．そのときの義理の親戚とのことはよっぽど不快なのか母は殆ど話さない．いくつか聞いたのは喰い物もろくにないからお乳がでなかった．勿論ミルクなぞあるわけもなく，ちょうどその年笹の実がたくさんなったのを取ってきて重湯を作りそれで育てたと言う．他にタンポポの葉を茹でて干して食糧にした話とか，週に一度山羊の乳を一合ほど分けてくれる人を僕の六つ上の姉がもらいに行った話とかを繰り返し感謝をして話していた．一年後に普通の赤ん坊ならもう立って捕まり歩きもできる年頃になっても僕は行李の底で痩せた青い顔をして転がっていたそうで，親としては，もうこの子は助からないと諦めたと聞いた．

家では父は寡黙でいつも机に向かっていた．幼い僕がうっかり寄っていって机の上を乱そうものならげんこつが飛んできて張り倒されたことも何度となくある．子供心に家が貧しいとは思っていなかったが，記憶にある母はいつも何か内職をしていた*4)．僕が幼稚園にも入らぬ幼い頃には焼きプリン，スィートポテトとか焼きりんごとかを焼いて新宿の白十字とか中村屋とかの喫茶店に売りにいくのである．幼い僕は終日飽きずその作業場で母の仕事を見ていて，新宿まで売りにいくのに連れ歩かれたようである．僕が3歳の頃何を思ったのか母が見当たらないと探しに一人とことこと家を出て歩き始めた．それを見つけた母はどうす

*4) 僕の大学や大学院時代でも内職の袋貼りや箱作の材料段ボールがうず高く積まれておりプラスチック接着剤の匂いがいつもプンプンしていた．今更ながらそんなにしてまで勉強させてくれた親には感謝の言葉もない．

るのかとそっと後をつけていったところ，ずんずん歩いてとうとう中野駅まで出てしまったという．そこで危ないので，母は僕を抱き止めたという（当時は駅前も車は多くなく人力車とか荷馬車とかが多かった）．どういうわけかブラームスのクラリネット五重奏曲の第二楽章を聞くとその頃の母と二人きりだった濃密な時間を思い出す．千光前の家の裏手のお茶の植垣のある道を母に手を引かれて歩いている幼い頃の自分のことを思い出す．何故だろう．もしかしてその頃ラジオの名曲の時間に流れていた曲なのだろうか．

10. 電子生命（大学入学）

話は一挙に飛んで，僕は1963年四月東大理科一類に入学する．その前には僕は相変わらずいろいろ思い悩み仏教を勉強しに京都大学に行きたい等と自分でもわけの分からないことを言っては親をてこずらせていた．それに対して親から「東京以外で勉強させるような余裕はこの家にはありません」と一蹴されて，自ら学資を稼ぐ気概もないままにずるずると東京を受験したのであった．これも敗北といえば敗北であった．それでも，そこは若さの有り難さ，一旦大学に入ると僕はある限りの知識を吸収しようとがんがんと本を読みはじめた．一体我々の存在理由は何なのか，僕等の生きて在る目的は何なのか，そんな解き得ぬ問題に立ち向かうべくわけも分からず哲学の書も読み漁った．一方生物への関心は止むことなく授業，実験，観察の科目を取る一方，クラスの友人相手には，「俺はコンピュータで生命を作って見せる」等と吹聴していた．僕はその頃既にオパーリンの『生命の起原』やバナールの『生命の起原』を読んでいた．彼らは彼ら以前の生命の起原論が見せかけだけな物と批判して，化学的に発生進化の過程を其々の視点から説明しようとしていた．一方コンピュータ技術はまだ生まれたばかりで（当時の東大物理の高橋秀俊研究室でもパラメトロンと言う本質的にリレー式のコンピュータを研究していた時代），後でロシアはコンピュータ技術で西側に大幅に遅れを取ってしまうが，当時論理学と電気回路を結び付けた初歩的な解説書はむしろロシア側に多く，高校時代の僕はその辺も読み漁っていた．だから生命とコンピュータとを結びつけるという（今では普通に行われている）考えは僕にとっては自然な物だった．またそれは生きとし生ける物の存在理由を理解する手がかりを与える（かも知れない）考え方であった．だから，当時最先端のDNAから蛋白質合成の情報を読み取る仕組みの研究を推進されていた今堀和友先生の輪講に加わった（後で述べる佐々木武氏等TSG仲間も一緒）のは新鮮でエクサイティングであった．それで進学先を工学部の電子学科にするのか理学部の生物学科にするのか等と考えていた[*5]．

11. TSG（理論科学グループ）

一方，僕は当時駒場に有ったTSG（理論科学グループ）と言うクラブに入る．その案内に本の輪講をする他に山によく登ると有ったことに引かれたからである．1年後には僕はこのクラブに部長として持てるエネルギと時間の大半を注ぎ込むことになり，また，ここで何人か僕の生涯にとって決定的な人たちと出会うことになる．実際このクラブに入るとすぐにグループ分けられて其々のグループで本を読みはじめた．そのほうは大して面白くなかったが，よくグループ横断的に山に行った．入部早々は奥多摩の雲取，秩父の黒金，乾徳を手始めに，毎月のように山に行った．それは北アルプス，中央アルプス，南アルプス八ヶ岳のように大きな山々もあれば丹沢とか秩父とかの身近な山々もある．数日分の食糧とテントの重い荷を背負いながら夜叉神峠のトンネルを抜けていくと突然前方にはるばるひろがりそびえ立つ雄大な北岳の姿が見えた感動は忘れ難い．或いは霧雨煙る中散り敷いた落葉を踏み締めながら徳本峠を越えてゆき，翌朝からりと晴れ涸沢から見上げた穂高連峰の勇姿，あるいは遅い梅雨にずぶ濡れながら

*5) 東大のシステムは大学に入るときは大まかに理Iとか理II等と区分けされるだけで2年間は学問全般に渡って習得して，1年半後に進学振り分けで行きたい所を選ぶようになっている．人に依ることであろうが，僕自身はこのシステムにより助けられたし，いい制度だと思う．



北岳山頂にて（後方にいるのが佐々木武氏，前列左から 2 人目が筆者，右端は木下隆一氏．1964 年 7 月撮影）．

這松に覆われた雲の平の湿原を越えていってたどり着いた山小屋で出迎えてくれた山番の青年の笑顔，またその雨の相間に垣間見た薬師岳の悠然とした姿等いずれも深く心に残っている．こうした中で僕は同年代の友人たち：萱沼，佐々木，萩原，木下，勝原，高柳，久保，岡崎，本田，砂山，川崎，米村等を得て時には夜を徹しての議論に明け暮れる日々になる．そんな中でも僕の人生への疑問は解消することなく続いていた．

12. 海部宣男氏

秋が来て駒場祭の準備に明け暮れることとなった．そんなある日，作業中の寮の一室であったかその後のバーで何かを飲んでいたときであったか，僕はいつもの疑問「人の生きている理由は何か」を一年先輩の海部宣男氏*6) にぶつけた．彼は他の人とは何処か異なる端然とした所があり，物事の判断の明晰さでも図抜けていて，僕も尊敬していたのである．海部氏はこう答えられた．「ハイデッガーにはこう書いてある『人は存在を追求する存在である』と」*7)．僕は電撃に打たれたように思った．それまで，何か最終目的があり，我々人間はそれに向かって突き進んでいるのかと思っていたが，そうではない．そんな目的なぞない．我々の存在そのものが追求の対象なのであると．これを狭い意味に取れば自分自身を自己目的とする自己撞着になってしまう．そんな物ではなく我々はもっと外に向かって開かれた，常に動的にインタラクションを保つ存在として存在を追求するのであろう．それは「有るのでなければ無いのでもない」という釈迦の言葉に通じる様に思う．

この後，僕は自分で驚くほど気持ちが整理されていった（それでも，時に夢で焼け付くような焦燥感に襲われて目覚めることはその後長く続いたが）．

13. 佐々木武氏

1 年経って進路選択の時期となった．電子学科はそれまで僕の考えていた根源を問うていく場と

*6)　海部氏の名をその後，天文学者として野辺山天文台，すばる天文台におけるご活躍で漏れ聞き尊敬の念を新たにしていた．その海部氏と半世紀近くを経て IPMU を通して再会できるとは，思いもよらぬ巡り合わせである．

*7)　出典はハイデッガー著の『存在と時間』だったと思う．うろ覚えであるが，確か原著では “Sein” と “Dasein” で区別していた．ドイツ語の “da” は “そこに” という意味だと思うが，“Dasein” の日本語訳の “現存在” では何を言っているのだかさっぱり分からない．人間の存在について根源的な問いかけをしている原著が，訳語のためにとりつきにくくなっているとしたら残念な事である．

は異なることが分かった．他方生物学科には未練はあったが，生物を含む実験科目の成績がさんざんであった．物理，化学の測定の実験はもとより，生物の蛙の解剖図も植物組織の写生もどれもぎりぎりのひどい成績だった．こうして物理，化学，生物は自動的に選択肢から消えた．それと共に電子生命を作ろうという夢も消えた．残るは数学だけだった．この決心を後押ししたのが，僕にとって生涯の畏友佐々木武氏である．彼は TSG 仲間であった．僕がふわついたことを言うのに対し彼は広島弁を丸出しにしながらいつも現実を踏まえて手厳しかった（考えて見れば彼は僕が初めて数学の洗礼を受けた中学時代の塩田先生に似てなくもない）．それよりも何よりも佐々木武とは木下隆一と共に最も多く一緒に山に行った仲間であった．山の中での彼の冷静沈着，頑張り，厳しさに対し僕は一目も二目も置いていた．ある夏の山行で北岳から勢いよく下って来て僕は目の前の大石に飛び乗った．その2尺はあろうかと思われる大石はその勢いでグラッと動きだし二三メートル先を歩いている佐々木のほうに転がりだした．佐々木は「ウォー」と吠えるとも分からないすごい叫び声をあげてその石を抱き止めた．その石は道脇に転がされ，難なきを得た．その後この件で彼と話したことはない．また彼がその話をすることもなかった．その佐々木武が数学科に行くという．そして僕にも行かないかと誘ったような気がする．これは記憶違いかもしれない．とにかく一緒に行こうという空気だった．もともと数学は嫌いでなかったから，異存はなかった．今考えると数学は本命として深い所に居ながら，他の選択肢故に道に迷って居たのかもしれない．

14. 岩堀長慶先生

数学科に進学し迷いは捨てたとはいえまだ自分のやることは何も見えてなかった（後で触れるようにそれに出会うのはその先更に3年先の大学紛争のさなかでのことであるが）．それでも，駒場ではその他大勢の中の一人の学生であったときとは違って，お茶飲み場の三宅おばさんが「恭司さん」といって一人前に扱ってくれる新しい環境は嬉しかった．当時の同級生が19人という未だ教室を拡張する寸前のこじんまりした教室で，お茶飲み場をのぞくと早川貫太郎氏と竹内文彦氏とがソファに座して議論していたりして，家族的な雰囲気だったのである．講義は端々と進んだが特に胸踊らせるものはなかった．志村五郎先生，佐武一郎先生，岩堀長慶先生，小平邦彦先生，佐藤幹夫先生そして若き伊原康隆先生等と看板になるような先生方は皆アメリカに出払っていたのである．話をして面白かったのはアメリカに行く寸前だった岩堀先生で，先生の部屋を時々尋ねては当時考えていたこと（平面非凸領域の面積とその含む格子点の関係（ミンコフスキーの定理のある一般化），とか多項式ベクトル場と多項式自己同型群との関係とか…）得々と喋ったりした．今考えると，よくぞそこまで相手にしていただいたものと思う．ただ，途中まで喋ると「今日はこれから日比谷公園でのデモに行くのでこれで失礼します.」等といって抜け出すのも屡々であった．一方岩堀先生には酷い目にもあった．数学科進学後お決まりの集合と位相の講義の冒頭に先生は「これが読めたら凄いですよ」と言われながら Bourbaki の第一巻を文献として挙げられた．そこでその凄いという奴を読んでやろうと同級生数人でそれを読みはじめた．当時 Bourbaki が数学教育の中に猛烈な勢いで流れ込んできた時代であった．何も知らなかった僕等は「Bourbaki の第一巻とあらばこれは読まざるを得まい」と思った（今なら，Bourbaki がやったのは数学改革であって数学教育改革ではなかったと言えるが）．同級生とその本を前にして1ページ目のわずか数行を読むのに四苦八苦する日が続き結局は give up してしまった．今考えればその本は岩堀先生の数学とはほど遠い所にある*8)．岩堀先生はその本を反語的な意味で取り上げられたことはほぼ間違いあるまい．

---

*8) 岩堀先生は代数群，Chevalley 群等を研究されていた．それは非常に具体的かつ緻密な構成によるものである．その後15 年を経て僕は先生のされた（今日言うところの）affine root 系に関するお仕事のある楕円化に取り組むことになる．

15. ε-エントロピー（院試に向けて）

僕は数学科に進学したとき何か運動をしようと思っていたが，当時理学部に唯一あったのはラグビー部であった．友人たちは「斎藤がラグビーやるなんて？」笑ったが，僕はそんならやってやろうと本当に始めた．僕のポジションはフッカーでスクラム正面で敵とガブッと組み合うのが役割である．対外試合で勝ったことは一度もなかったが満身の力を込めてジリッジリッと押し合うのが好きだった．1966年の夏は僕は佐久で合宿の後，北アルプスの麓の信州の安曇野に在る古い農家で一人で過ごした．そこにはかつては祖父が住んでいたが空き家だった．大学院進学の受験勉強のためということもあったがエントロピーと言う概念に引かれて本を何冊か持ち込んで勉強しようとしたのだ．物理学者シュレディンガーは『生命とは何か』という本で生命とはエントロピーを食う存在であると云うことを言っているのを踏まえてではあるが，一方たまたまその夏『情報理論の進歩』と言う，シャノン以来の情報理論の基本文献を邦訳した分厚い本が岩波から出版されたからである．それはアーノルドのε-エントロピーの理論やヒルベルトの第＊問題の解決を含んだ本で講義にはない生の素材の新鮮さが面白かった．一月後の院試の口頭試問の際，吉田耕作先生と弥永昌吉先生が書類をちらっと見て開口一番「君は大学院に入ったら何がやりたいですか？」と聞かれたのに対し「情報理論をやりたいです」と答えたのであった．先生方は一瞬怪訝な顔をされて「それは，どうして」と聞かれた．僕は一夏の勉強成果を一所懸命話をしたが，先生方は「ハハアそうですか」と言われて試験は終わりとなった．

16. 駒場でのセミナー，大学紛争始まる

残念ながらこの方面での関心はその後深まることなく，僕，佐々木武，竹内茂，志賀弘典は河田敬義先生[*9)]のお薦めで駒場のK先生の所で多変数関数論を研究することとなる．このような主体性のない選択のせいもあったのかセミナーは全く面白くなかった．K先生は僕等には分からない内輪でしか通じない何か細かい技術上のことをそそくさと言うだけで，僕には数学上の実体は何一つ見えてこなかった．それでセミナーの度に何か時間を無駄にしたという虚しい思いをして帰途に着くのだった．未熟だった僕には自分達がどんな状況に在るのかさえ客観的に見えてなかった．ただ漠然と何か変だなと思っていたのみである．一方同時に開かれた及川廣太郎先生による擬等角写像とタイヒミュラー空間論セミナーは等角構造と言う得体の知れないものがタイヒミュラー空間という形をとってまざまざと現れてくる様が面白かった．

しかしこのようなあいまいな状況は長くは続かなかった．1967年6月東大医学部に起きた紛争を解決すべく，大学執行部は警察の導入をはかった．それ自体大学の自治を危うくするものとして大学全体が蜂の巣をつついたように騒然となった．それは日本全体の政治情勢（日米安保条約の改定を2年後に控えていた）及び世界の政治情勢（トンキン湾への北爆に始まるベトナム戦争は泥沼化し世界的に厭戦気分が拡がっていた）と重なって，その後2年ほど大学は機能マヒ状態に陥ってゆく．学生，院生，職員その他の各レベルでの自治組織による集会が開かれデモが繰り広げられ，講義は多く中止になり[*10)]，K先生もセミナーでは政治談義に時間を費すのだった．この時期の経験は未だ未整理で本稿には書き切れない．ただその間に平和時にはとても見られないような多くの立場の人の多くの行動を目の当たりにみて，群集心理と個人の信用，信頼，信念（逆の言葉でいえば，背信，裏切り，無節操）について等多くを学んだと思う．以下に，その紛争内容とは直接は関係のない2つの出来事についてのみ書こう．

*9)　類体論のコホモロジカルな構成で知られる．河田先生は4年のときにGunningの多変数函数論の本の輪読を指導していただいた．当時教室主任をされていたように思う．

*10)　この直前に帰国された小平先生は数学が育っていく姿をまざまざと見せてくれる一連の素晴らしい講義をされた．また，帰国された佐藤先生を招いて小松彦三郎先生が開かれた代数解析セミナーにもわくわくさせられた．

17. 河田敬義先生

1969 年 1 月加藤一郎新総長と学内七者協議会との交渉を目前に控えて再度警察が導入されるという危険があった．理学系大学院院生協議会は理学部本部のあった一号館を封鎖することを決定しロッカーを積み上げるようにしてバリケードが築かれた．僕は院協の情報を当時，理学部職員組合の書記をされていた飯高茂氏に伝えた．飯高さんは大急ぎで組合室に資料を取りに戻っていかれた．当時既存の情報ルートは機能していなかったのである．早朝より正面玄関に僕等要員は腕組みをしてピケを張った．大方の先生方は出勤されなかったが，朝 8 時すぎ頃向こうの弥生門から河田先生がいつもの灰色のコートに黒カバンをさげて入ってこられた．僕は「困ったことに成った」と思った．河田先生はそのまま真直にピケを張っている僕等の正面に来られると「これはどうしたことですか」と穏やかに聞かれた．僕は「先生，申し訳ありません．今日はお入れすることができません．」と言うのが精一杯だった．普段の温厚な先生からは想像できなかった事だが先生は一瞬身がまえて何度かその大きな体をぶつけて，ピケを破ろうと試みられたがさすがにスクラムはくずせなかった．どんな非常時であれ，自らの本務を尽くそうとされた先生に対し僕は胸の中で手を合わせるのだった．今でもこのときの先生のことを思い出すと目頭が熱くなる．

18. 数学との出会い

講義，セミナーが実質なくなっていった時点で僕等（佐々木，竹内，志賀等）は自発的にセミナーをせざるを得なかった．それは学外の湯島天神であったり，上野の文化会館ロビーであったりした．他方デモや集会その他の活動の合間を縫って僕は数学の入門文献を必死に公園のベンチや移動の都電の中等で読み漁った．その中には S.S. Chern の複素多様体論，M. Artin の代数曲線と代数空間論も有ったが，もっとも心惹かれたのは E. Artin による類体論と C.L. Siegel による楕円積分論だった．いずれも青焼と言って写真で撮った原版を印画紙に焼き付け更に現像液に浸し乾かすという今から見れば手の込んだコピーであったが，それを僕は何処に行くときでも鞄に入れ持ち歩いていた．Artin のほうは大道具を使わぬ手仕事でガロアコホモロジー類を構成しながら類体の姿をまざまざと見せてくれたし，Siegel のほうはレムニスケートの弧長積分から始まって楕円積分の加法性とそれから生まれる楕円関数の姿を悠揚迫らず説き起こして行くのであった．物情騒然とした中にあっても，それを読んでいるときだけは時間は止まっていたと思う．もしかして生涯で最も至福の時であったかもしれない．形式的にはまだ続いていた大学院のセミナーとは独立に，またそのときは未だ自覚していなかったとはいえ，僕はこのとき初めて僕自身の生涯の興味関心と研究方向を決定付ける数学に出会っていたのである*11)．それは 20 世紀の初頭からわずか数十年の間に輝かしい光芒を放ちながらも，ナチスの登場と共に脆くも崩壊していった複素解析学と数論とが深い所で結び付いたドイツの Goettingen や新興の Hamburg を中心に花開いた数学である．

19. Henri Cartan 先生

1969 年 1 月加藤新総長と七者協議会との話合いはまとまり紛争は収束に向かった．河田先生は僕等修士 2 年生を教室に呼び集め「このような時期だから君等にオリジナルな結果を出す修士論文を要求しない．総合報告でもよいから書いて提出しなさい」と言われた．僕は解析空間の圏論的構成をテーマにした修士論文を書いた*12)．この話

*11) このことをはっきり自覚するのは更に 2 年後 Goettingen に留学して Siegel に会ってからのことである．

*12) 紛争の間も当時続々発刊されつつあった EGA を僕は級友の渡辺敬一氏と読んでいた．Grothendieck が代数多様体を表現可能な関手として実現するのを習って僕は解析空間を表現可能な関手として実現してみようと思った．そのためには概型理論と次のような対応原理を考える：可換環 $\leftrightarrow$ complete seminormed ring, ideal $\leftrightarrow$ seminorm. すると Oka-Weil 領域を基本近傍とする様な位相が自然に入る ringed space が作れる．Stein 多様体を表現可能な関手として実現する所まで修論で書いて時間切れとなってしまった．

はその年の4月東京で開かれた国際会議 "Functional analysis and related topics" で小松先生に取り上げて頂き講演する機会を得た．それは翌年のNiceに於けるICM (国際数学者会議) の予備会議だったので，IMU (国際数学者連合) の会長だったH. Cartan*13)が参加していた．僕の講演はCartanの注意をひき，高橋礼司先生のお宅のパーティに招かれそこでCartan先生に紹介された．先生は優しくパリに来ないかと言われた．本来なら願ってもない申し出であった．にも係わらず，僕は生来の天邪鬼が頭を擡げてしまった．「御親切なご招待有り難うございます．でも僕はドイツのGrauertの所に行く予定です」．それを聞いてCartan先生は一瞬弱った顔をされたが，既に先約があるとなれば (実はこれは嘘だった．次節参照) 致し方がないという風に肩をすくめられた．

20. 旅立ち

話は少し戻る．僕は1969年4月から駒場数学教室の助手として採用された．紛争そのものは収束したとはいえ，僕の日常は相変わらず慌しかった．振り返って，過去2年間何者にも替え難い経験をしたとはいえ，研究者として伸び盛りの時期を費した時間を思うと胸が焼け付くようだった．紛争を一緒にくぐり抜けてきた仲間のことを思うと何とも辛かったが，僕は何としても数学に専念したかった．こうしていては駄目だ．このままでは情勢に押し潰されてしまう．そうだ，日本を抜け出そう．そう考えるようになった．当てがあったわけではないが，当時多変数関数論と言えばパリのCartanかGoettingenのGrauertの所が中心だった．僕にはGrauertが一番に見えた．それでCartan先生に誘われたときに生意気にもGrauertの名前を挙げてしまったのである．ただ豊かになりつつあったとはいえ戦後をまだ引きずって居た当時の日本で，海外に行くといえば圧倒的に豊かなアメリカに行くのが大半で，たまにフランス (パリ) に行くものがいる程度でドイツはほとんど皆無と言ってよかった．しかしCartan先生に大見栄を切ってしまった以上それを実現しないわけにいかなくなった．僕はアメリカから戻られた小平邦彦先生に頼んでGrauertへの推薦状を書いて頂いた (僕は当時飯高さんに誘われて，毎週土曜の小平セミナーに出入りするようになっていた)．Goettingenに留学したい旨のドイツ語の手紙は高橋先生のInge夫人に書いて頂いた．

5月頃ドイツ大使館文化部から出頭するようにと言う手紙をもらい意気揚々として出かけて行った．そこでは大きな机を囲んで数人の人が待ち受けていた．中央の人が何かドイツ語で話掛けてきた．全く分からないので「えっ何でしょうか」と聞き耳を立てるとまたペラペラと話をする．そんな遣取りを数回か繰り返した後，横に座っていた日本人の書記官と思しき方が日本語で解説をされた．それに依ると「『貴方がこのドイツ語のお手紙をご自分で書かれたのですか？』と聞いているのです．小平先生の貴方への推薦状は非常によいものですが貴方の現在の語学力では，ドイツ留学を認めるわけには行きません．Goethe-Instituteに行きドイツ語を勉強しなさい．」と言うようなものであった．僕は多少は落胆はしたものの，そこは若さ故か，たいして気にならず市ヶ谷にあったGoethe-Instituteに3カ月ほど通った．

こうして9カ月後の1970年2月初め僕はルフトハンザ機にてドイツに飛び立つのであった．当時は若い人の留学はもの珍しく，空港には柏原正樹氏を始め多くの同世代の友人たちが見送りにきてくれた．この時期は僕個人のみならず．日本でも世界でも第二次世界大戦後という時代の変わり目でもあったがまだ新しい時代は見えていなかった．前途に何があるかは全く分からなかったが，もう迷いはなく気分は晴れ晴れとしていた*14)．

(さいとう・きょうじ，東京大学数物連携宇宙研究機構)

*13) 同氏はElli Cartanの子息で多変数関数論関係で幾つか知られた仕事がある．岡潔の仕事をSerreと共にcoherent sheafの言葉でまとめ挙げ世に広めたので著名である．

*14) 振り返って僕が数学者になる道が決まったのは何時だろうか．数学科に進学したときか，あるいは大学院進学したときか．それとも，Artin, Siegelを読んでいたときか．しかしそれより遥か昔に筆宝先生，塩田先生，岡田先生に出会ったときあるいはY君に励まされたときだったかもしれない．大切なものは静かに時間を掛けながら育つのであろうか．

編集後記

アインシュタインは，感動しないのは死んでいるのと同じことだ，と言っていますが，本特集風に言い換えるならば，この世界に潜む美しさのいくつを感じ，発見することができるかが人生である，となるでしょうか．いびつに見える世界の形があるとき美しく見えるようになる．そんな隠れた美しさの見つけ方，見方を感じとって頂けたら幸いです．　(N)

＊　　＊

対称性は私たちの身の周りに数多く潜んでいます．そして多くの人々がその美しさに魅せられてしまいます．

大作曲家バッハもある作品では，盛り上がりの頂点を示すために，対称構造を導入していたようです．

古くから多くの分野に存在している概念に皆さんも親しみませんか．　(R)

数　理　科　学　3月号

2009年3月1日発行

数理科学編集部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL. (03) 5474–8816
FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所　©　株式会社 **サイエンス社**　TEL. (03) 5474–8500 (代表)
〒151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷1–3–25　振替 00170–7–2387　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁